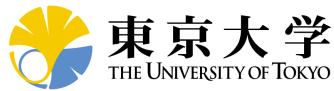


*Thesis for Master Degree*

# インフレーション宇宙に対する ストカスティックアプローチ

The stochastic approach to the inflationary universe



多田 祐一郎

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻  
東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構  
学籍番号:35-126053

E-mail: [yuichiro.tada@ipmu.jp](mailto:yuichiro.tada@ipmu.jp)



# 概要

本論文ではストカステック形式を利用して、インフレーション中に作られる曲率ゆらぎを計算する新しい手法を提唱する。我々の手法ではインフラトン場についての摂動展開を用いることなく、e-foldings のゆらぎが計算され、それが  $\delta N$  形式によって曲率ゆらぎに変換される。従って我々の手法ではインフラトン場の摂動の高次効果が自動的に含まれ、摂動が破綻する模型、量子ゆらぎが古典ダイナミクスを上回る模型等に、そのまま適用することができる。またゆらぎの非ガウス性も同時に計算される。本論文では、単一場スローロールインフレーションにおいては、我々の手法が通常の線形摂動理論と無矛盾であることを解析的に示し、より一般の場合に曲率ゆらぎのパワースペクトルや非線形性パラメータを数値計算する処方箋を与える。さらに、その処方箋をハイブリッドインフレーションの臨界点付近で生成される曲率ゆらぎに適用することで、実際にインフラトン場の単純な摂動論が破綻している模型において、パワースペクトルが計算できることを示す。



# 目次

序	vii
記法	ix
第 1 章 現代宇宙論の基礎	1
1.1 一様等方宇宙	1
1.1.1 時空の幾何学	1
1.1.2 赤方偏移	4
1.1.3 Friedmann 方程式	5
1.1.4 宇宙の密度	7
1.1.5 Friedmann 方程式の解	9
1.1.6 宇宙のエントロピー	10
1.1.7 ホライズン	12
1.1.8 宇宙の熱史	14
1.2 宇宙論的ゆらぎ	15
1.2.1 場の方程式	15
1.2.2 ゲージ変換	22
1.2.3 スーパーホライズン保存量	25
第 2 章 インフレーション	31
2.1 加速膨張と 3 つの問題	31
2.1.1 インフレーションの定義	32
2.1.2 平坦性問題	33
2.1.3 地平線問題	36
2.1.4 モノポール問題	38
2.2 スローロールインフレーション	39
2.2.1 スローロール近似	39

---

2.2.2	スローロールインフレーション模型	42
2.2.3	再加熱	45
2.2.4	e-foldings	47
2.3	インフレーションにおけるゆらぎの生成	49
2.3.1	線形ゆらぎ	49
2.3.2	ゆらぎの古典化	55
2.4	$\delta N$ 形式	60
2.4.1	定式化	61
2.4.2	インフレーションで作られる曲率ゆらぎ	65
第3章	ストカスティック形式	69
3.1	Langevin 方程式 I ~ 運動方程式からの導出	70
3.2	Langevin 方程式 II ~ 経路積分からの導出	74
3.2.1	スカラー場に対する影響汎関数法	74
3.2.2	揺動項	76
3.3	インフレーションダイナミクスへの揺動項の影響	79
第4章	ストカスティック- $\delta N$	83
4.1	ストカスティック- $\delta N$ 形式におけるゆらぎの計算手法	83
4.2	単一場スローロールインフレーション	87
4.2.1	パワースペクトル	87
4.2.2	非ガウス性	90
4.3	一般の場合への拡張	92
第5章	ハイブリッドインフレーション	97
5.1	雑音の大きさ	97
5.2	ダイナミクス	99
5.3	通常の $\delta N$ 形式	102
5.4	ストカスティック- $\delta N$	104
第6章	結	109
付録 A	有限温度場の理論	111
A.1	実時間形式	111
A.1.1	Closed Time Path 形式	112
A.1.2	伝播関数	114

---

A.1.3	行列表示	115
A.2	影響作用の計算	116
付録 B	確率解析	119
B.1	一般的な確率論	119
B.1.1	無限確率空間	119
B.1.2	確率変数と期待値	124
B.2	情報と条件付け	126
B.2.1	情報と $\sigma$ -加法族	126
B.2.2	一般の条件付き期待値	128
B.3	ブラウン運動	130
B.3.1	大きさ調整されたランダムウォーク	131
B.3.2	ブラウン運動	134
B.3.3	2次変分	135
B.3.4	到達時刻の分布	139
B.4	伊藤積分	143
B.4.1	被積分過程が単過程の場合の伊藤積分	143
B.4.2	一般の被積分過程に対する伊藤積分	145
B.4.3	伊藤-Doebelin の公式	148
B.5	数値計算法	151
B.5.1	離散時間近似	152
B.5.2	強収束の指標	152
B.5.3	弱収束の指標	153
B.5.4	伊藤-Taylor 展開	153
B.5.5	強 Taylor 近似	155
B.5.6	強 Runge-Kutta 法	155





# 序

標準ビッグバン理論に始まる現代的な宇宙論は、非常に大きな成功をおさめてきた。理論的にもあらゆる物理分野の舞台となれる宇宙論は、さまざまな観測技術の発展と合わさって、現在最も白熱している分野の1つである。その中でもインフレーション [13–15] と呼ばれる初期宇宙の理論は長い間注目され続けている。インフレーション期ではプランクスケールに近い、非常に高いエネルギーの物理が展開されており、素粒子理論の観点からも興味深いとともに、インフレーション中に作られたわずかな密度ゆらぎは、その後の宇宙のあらゆるエネルギー濃淡の種となっており、宇宙背景放射や大規模構造形成の観測から大変精密に試験されている [12]。従って、これからさらに発展する観測技術に合わせ、インフレーションで作られる密度ゆらぎ (あるいは計量のゆらぎとしての曲率ゆらぎ) を正確に計算することが今後重要課題となってくる。

インフレーション宇宙においては、インフレーションを引き起こすスカラー場、インフラトンが持つ量子ゆらぎが“古典化”することによって曲率ゆらぎが生成されるとされている [33]。生成される曲率ゆらぎを計算する標準的な方法は、古典インフラトン場のまわりでの量子ゆらぎに関して摂動展開するというものである。これは古典インフラトン場のダイナミクスに対し、その量子ゆらぎは非常に小さいという状況のもとではとても良い近似である。実際現在観測できる長波長ゆらぎは、 $10^{-5}$  程度のゆらぎしかないことがよくわかっている。しかしより短波長なゆらぎに関しては小さいという保証はないし、短波長でゆらぎが大きいと原始ブラックホール [5–8] や超コンパクトミニハロー [9–11] 等の面白い天体が予言され興味深い。そしてこれらを正確に取り扱うには摂動展開はよくない。

また単純な1インフラトンのスローロールインフレーションでは古典インフラトン場のダイナミクスとガウス分布量子ゆらぎがよく分離されるが、複数インフラトン模型等では、古典場のダイナミクスと量子ゆらぎが混ざる、あるいは量子ゆらぎが大きく上回るといった状況が起き得る。このような状況になって来たときに、量子ゆらぎに関しての摂動展開は全く破綻してしまう。

そこで本論文では、古典インフラトン場と量子ゆらぎを統合して扱うストカスティック形式 [39–48] を用いることで、どのようなインフレーション模型であっても正しく曲率ゆ

らぎを計算できる処方箋を提唱する [1]。ストカスティック形式では長波長の量子ゆらぎを古典的な統計乱数 (白色雑音) に置き換えて解析する。従って数値計算にのせてしまえばもはやゆらぎについて摂動展開する必要はなく、ゆらぎののった運動方程式を非摂動的に解くことができる。これによってインフレーションの持続時間 e-foldings のゆらぎを非摂動的に直接求めることができ、これを  $\delta N$  形式 [34–38] と組み合わせることで曲率ゆらぎに変換する。

本論文では e-foldings の分散  $\langle \delta N \rangle$  を e-foldings の平均  $\langle N \rangle$  で微分することによって、パワースペクトル  $\mathcal{P}_{\delta N}$  を求めるが、ストカスティック形式にこのアイデアを適用する手法は初め Kunze らによって提唱された [57]。彼らは白色雑音についての摂動展開 [61, 62] を用いて曲率ゆらぎを計算したが、その結果は単一場スローロールインフレーションにおいても線形摂動理論から大きくずれている。しかし単一場スローロールインフレーションにおいてはゆらぎの線形性からのずれは非常に小さいスローロールパラメータで抑えられるので、線形摂動の近似がとてもよいはずである。従ってこのようなずれは不可解である。一方我々の処方箋において曲率ゆらぎの計算に摂動展開は全く必要ないし、さらに第 4 章で見ると、単一場スローロールインフレーションにおいては、線形摂動理論と我々の処方は無矛盾であることが、解析的に示される。

また本論文では、提唱した処方箋を用いてハイブリッドインフレーション [23, 24] の臨界点付近で生成される曲率ゆらぎを計算する。ハイブリッドインフレーションは 2 スカラー場のインフレーションモデルで、臨界点を過ぎると 1 つのスカラーが負の 2 乗質量を持ちタキオニック不安定性を持つ。このときこのスカラーの量子ゆらぎが急激に発達し、古典ダイナミクスを大きく上回る。そのためハイブリッドインフレーションの臨界点付近の曲率ゆらぎの計算は難しく、様々な近似のもと計算が行われてきた [25, 26]。第 5 章では実際に線形摂動理論が破綻していることを見てから、我々の処方でのパワースペクトルの計算結果を示す。

本論文は次のような構成である。まず第 1 章では現代宇宙論の基礎を、ついで第 2 章ではインフレーションの基本と線形摂動理論での曲率ゆらぎの解析を復習する。また第 2 章では、ストカスティック形式の基盤となるゆらぎの古典化を扱う。第 3 章ではストカスティック形式を 2 つの方法で導入し、そのインフレーションへの効果を簡単に見る。第 4 章ではいよいよ、ストカスティック形式と  $\delta N$  形式を組み合わせた新しい曲率ゆらぎの計算手法を提唱する。ここでは計算の処方箋を与えるとともに、特別な単一場スローロールインフレーションの時には計算が解析的に行え、それが線形摂動理論と無矛盾であることを確かめる。最後に第 5 章ではハイブリッドインフレーションに提唱した処方箋を適用し、臨界点付近での曲率ゆらぎを数値的に計算した結果を示す。

# 記法

一般に関数  $f$  に対し  $f'$  は  $f$  の導関数を、 $\dot{f}$  は時間変数  $t$  についての  $f$  の微分を表す。高階微分についても同様である。

$\mu, \nu$  等のギリシャ文字の添字は 4 次元時空の座標を表し、 $0, 1, 2, 3$  を走る。ただし  $x^0$  は時間座標である。一方  $i, j, k$  等のラテン文字の添字は 3 次元空間の座標を表し、 $1, 2, 3$  を走る。また繰り返される添字に対して、Einstein の縮約規則を採用する。すなわち、同じ式中で 2 度以上繰り返される添字は、その添字が走るすべてに関して和をとるものとする。対が上下でない添字に関しても和をとる。

Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  は  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  とする。

太字の変数 ( $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{k}$  等) は 3 元ベクトルを表し、これらに対し太字でない変数 ( $p$ ,  $k$  等) は、3 元ベクトルのノルム ( $p = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$  等) であるとする。

場  $\mathcal{F}$  の Fourier 変換とその逆は以下の規格化を採用する。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{k}} &= \int d^3x \mathcal{F}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathcal{F}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.\end{aligned}\tag{0.0.1}$$

単位系は  $\hbar = c = k_B = 1$  とする自然単位系を用いる。また重力定数  $G$  の代わりに、換算 Planck 質量  $M_p = (8\pi G)^{-1/2} = 2.453 \times 10^{18} \text{GeV}$  をよく用いる。



## 第 1 章

# 現代宇宙論の基礎

“宇宙論 (cosmology)” の歴史は古い。宇宙論という術語は宇宙、あるいは世界全体についての論や探究を指し示すが、それらは紀元より遙か以前からの人間の根源的好奇心の対象と言ってもよいだろう。ただしこれらは近現代に至るまであくまで形而上学の一分野であった。一方現代宇宙論は急激に発展した観測技術と、理論的には主に Einstein の一般相対論を支えとした、自然科学に属する学問である。特にたった 1 つの原理から出発し、論理的に導かれるビッグバン理論は、観測事実を的確に説明し大きな成功をおさめてきた。これは現代理論物理の中でも非常に刺激的な事実である。

現代宇宙論の基礎は大きくわけて 2 つの領域からなり、それは、一様等方近似における宇宙の歴史と、一様等方からわずかにずれたゆらぎの物理である。本章ではこれらのうち特に本論文に必要となってくる部分の定式化を重点的に述べていく。

### 1.1 一様等方宇宙

#### 1.1.1 時空の幾何学

標準的ビッグバン理論は、観測に基づいたある 1 つの原理から出発する。その原理とは、以下で与えられる宇宙原理である。

自由落下する観測者に対し、  
我々の宇宙は大局的スケールで空間的に一様等方である。 (1.1.1)

一様とは平行移動対称性のことで、空間に特別な点がないことを指し、等方とは回転対称性のことで、空間に特別な方向が存在しないことを指す。この原理と Einstein の一般相対論から記述される宇宙理論のことを標準的ビッグバン理論と呼ぶ。

一様等方な 3 次元空間としては 3 つしかない。線素が以下で与えられる平坦空間、

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1.2)$$

あるいは 4 次元ユークリッド空間中の、半径  $a$  の球面、

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 + dw^2, \quad w^2 + \mathbf{x}^2 = a^2, \quad (1.1.3)$$

そして 4 次元ユークリッド空間中の双曲面、

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dw^2, \quad w^2 - \mathbf{x}^2 = a^2, \quad (1.1.4)$$

である。座標を繰り込んで、

$$\mathbf{x} = a\mathbf{x}', \quad w = aw', \quad (1.1.5)$$

とし、プライムを落とせば、球面と双曲面の場合は、

$$ds^2 = a^2(d\mathbf{x}^2 \pm dw^2), \quad w^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1, \quad (1.1.6)$$

となる。 $w^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1$  を微分して得られる  $w dw = \pm \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  を使えば、

$$ds^2 = a^2 \left( d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right). \quad (1.1.7)$$

従って、平坦空間の場合も合わせて、

$$ds^2 = a^2 \left( d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right), \quad (1.1.8)$$

と書ける。ただし、

$$K = \begin{cases} +1 & \text{球面} \\ -1 & \text{双曲面} \\ 0 & \text{平坦} \end{cases} \quad (1.1.9)$$

これをそのまま時空の幾何学に拡張すれば、 $a$  は時間についての任意の関数となって、

$$-d\tau^2 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right). \quad (1.1.10)$$

これが宇宙原理を満たす時空計量で、Robertson-Walker 計量 (あるいは Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker の頭文字を取って FLRW 計量とも) と呼ぶ。計量の成分は、

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2(t) \left( \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right), \quad (1.1.11)$$

である。球座標、

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.1.12)$$

に変換して、

$$-d\tau^2 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right), \quad (1.1.13)$$

とすることも多い。このとき計量は対角化されて、

$$g_{00} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.1.14)$$

となる。また現在時刻を  $t_0$  として、 $a(t_0)$  を以下のようにくり出し、

$$\begin{aligned} -d\tau^2 &= ds^2 \\ &= -dt^2 + \frac{a^2(t)}{a^2(t_0)} \left( \frac{a^2(t_0)dr^2}{1 - (K/a^2(t_0))a^2(t_0)r^2} + a^2(t_0)r^2 d\Omega \right), \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

各変数を繰り込んで、

$$a'(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)}, \quad r' = a(t_0)r, \quad K' = \frac{K}{a^2(t_0)}, \quad (1.1.16)$$

として、プライムを落とし、再び、

$$-d\tau^2 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right), \quad (1.1.17)$$

とすることも多い。このとき、 $a(t_0)$  は 1 に規格化される代わりに  $K$  が任意の実数を取り得るようになることに注意しよう。

$$K \begin{cases} > 0 & \text{球面} \\ < 0 & \text{双曲面} \\ = 0 & \text{平坦} \end{cases} \quad (1.1.18)$$

同様に繰り込むことで好きな時刻で  $a(t)$  を 1 に規格化することも可能である。本論文では特に断らない限り規格化の任意性は残したままにする。

一般相対論において自由落下する粒子は、測地線方程式、

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\kappa}{du} = 0, \quad (1.1.19)$$

に従う。ただし  $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu$  はアファイン接続、

$$\Gamma_{\nu\kappa}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (1.1.20)$$

であり、また  $u$  はアファインパラメータで、質量のある粒子に対しては固有時  $\tau$  に比例する量である。重要なのは  $\partial_i g_{00}$  と  $\dot{g}_{0i}$  がともにゼロであるので、 $\Gamma_{00}^i = 0$  であることである。従って、この座標に対し静止  $d\mathbf{x}/du = 0$  している粒子は、 $d^2\mathbf{x}/du^2 = 0$  なので、自

由落下で静止し続ける。そのためこの座標を共動座標と呼ぶ。自由落下している観測者同士の共動座標距離は変わらないし、この観測者達にとって宇宙が一様等方である、というのが宇宙原理である。

またここで  $a(t)$  の意味も明らかになる。時刻  $t$  で原点から半径座標  $r$  までの固有距離を求めれば、

$$\begin{aligned} d(r, t) &= a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} \\ &= a(t) \times \begin{cases} K^{-1/2} \sin^{-1}(\sqrt{K}r) & K > 0 \\ (-K)^{-1/2} \sinh^{-1}(\sqrt{-K}r) & K < 0 \\ r & K = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

従って物理的な固有距離は共動座標距離の  $a(t)$  倍ということになる。 $a(t)$  が時間とともに増えれば、自由落下する観測者同士は、共動座標での距離は変わらないが、物理的な距離は長くなる。ここから  $a(t)$  はスケール因子と呼ぶ。ちなみに両辺の時間微分を取ると、

$$v = \dot{d} = \dot{a}(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} d, \quad (1.1.22)$$

となり、 $H = \dot{a}/a$  とすれば、

$$v = Hd, \quad (1.1.23)$$

を得る。これは Hubble の法則そのもので、遠くの銀河はその銀河までの距離に比例した速さで遠ざかると言える。つまり宇宙が膨張しているという観測事実はスケール因子が時間とともに増加することで説明できるということである。この  $H = \dot{a}/a$  を Hubble パラメータと呼び、その現在値、Hubble 定数  $H_0$  は Planck 衛星の観測 [12] から、 $H_0 = 67.4 \pm 1.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (68%) とされている。ちなみに  $1 \text{ Mpc} = 3 \times 10^{24} \text{ cm} = 316 \text{ 万光年}$  である。

### 1.1.2 赤方偏移

宇宙膨張が光の波長に及ぼす影響を見てみよう。半径方向に動く光が描くヌル測地線は、

$$0 = ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2}. \quad (1.1.24)$$

今、光は半径座標  $r$  から原点に向かっているとすれば、

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.1.25)$$



を満たす。まず、時刻  $t = t_1$  に  $r$  を出た光が  $t = t_0$  に  $r = 0$  に届くとすると、

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.1.26)$$

の関係が成り立つ。一方、 $t = t_1 + \delta t_1$  に  $r$  を出た光が  $r = 0$  に届く時刻を  $t_0 + \delta t_0$  とすると、今度は、

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.1.27)$$

となる。2式を引いて、

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.1.28)$$

$\delta t_0$  や  $\delta t_1$  が十分小さければ、

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (1.1.29)$$

ここで、 $\delta t_1$  を時刻  $t_1$  での光の1周期  $\lambda_1/c$  に合わせれば、 $\delta t_0$  は光を受け取った時刻  $t_0$  での光の1周期  $\lambda_0/c$  に一致するので、波長間にも以下の対応がつく。

$$\frac{\lambda_0}{a(t_0)} = \frac{\lambda_1}{a(t_1)}. \quad (1.1.30)$$

従って、宇宙膨張によって光の波長は  $a(t_0)/a(t_1)$  倍長くなることになる。これを宇宙論的赤方偏移という。また、以下で定義される  $z$ 、

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1, \quad (1.1.31)$$

のことも赤方偏移という。 $a(t)$  は時間とともに増加するので、過去に出た光ほど赤方偏移が大きくなる。また光速は一定なので、赤方偏移が大きいほど遠方から出た光ということになり、赤方偏移で地球からの距離を表すこともしばしばある。

### 1.1.3 Friedmann 方程式

宇宙の大局的な時空が FLRW 計量で表されるとわかったので、その力学は Einstein 方程式、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1.32)$$

を解けば求まるはずである。FLRW 計量の下で、Ricci テンソルと Ricci スカラーはそれぞれ、

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} \right) g_{ij}, \\ R &= 6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

と求められる。次にエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  だが、まず宇宙の等方性より任意の 3 元テンソル  $t^{ij}$  の平均は、 $\mathbf{x} = 0$  で  $\delta^{ij}$  に比例していなければならず、従って原点で  $a^{-2}\delta^{ij}$  である  $g^{ij}$  にも比例している。また一様性よりその係数は時間のみの関数でなければならない。 $t^{ij}$  と  $g^{ij}$  の比例関係は平行移動を含むあらゆる座標変換で不変でなければならないので、時空の任意の点で、エネルギー運動量テンソルの空間成分は、

$$T^{ij} = P(t)g^{ij}, \quad (1.1.34)$$

の形をとる。また  $T^{00}$  は時間のみの関数でなければならないし、3 元ベクトル  $T^{0i}$  はゼロでなければならない。まとめると、

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = P(t)g^{ij}, \quad (1.1.35)$$

となる。これは完全流体の形をしており、 $\rho(t)$ 、 $P(t)$  はそれぞれ流体のエネルギー密度と圧力に一致する。後は Einstein 方程式に代入するだけである。

まず (0,0) 成分は、

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (1.1.36)$$

となり、これを Friedmann 方程式と呼ぶ。特に  $K = 0$  とできるときは、Hubble パラメータ  $H = \dot{a}/a$  と換算 Planck 質量  $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$  を用いて、

$$3M_p^2 H^2 = \rho, \quad (1.1.37)$$

の形で用いることが多い。次に (i,j) 成分は、

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)a, \quad (1.1.38)$$

と、スケール因子の加速度の方程式を与える。この 2 つの式、あるいはエネルギー保存則、

$$0 = T^{0\mu}{}_{;\mu} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu T^{0\nu}, \quad (1.1.39)$$

より、連続の方程式、

$$\frac{d(a^3\rho)}{dt} = -P\frac{d(a^3)}{dt}, \quad (1.1.40)$$

を得る。これは  $a^3$  が物理的体積を表し、体積中のエネルギーは圧力による仕事によって変化するという、熱力学第1法則  $dE = -PdV$  そのものである。また連続の式は、

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(P + \rho) = 0, \quad (1.1.41)$$

の形に書き直されて使われることも多い。

ちなみに Einstein 方程式に宇宙項  $\Lambda g_{\mu\nu}$  を導入して、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.1.42)$$

とすることがあるが、この場合は、

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}, \quad (1.1.43)$$

とエネルギー運動量テンソルに宇宙項を押し付け、方程式には宇宙項は入れないものとする。このときエネルギー運動量テンソルに新たに増えた成分は、

$$\rho = -P = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.1.44)$$

という状態方程式を満たすことになる。 $\rho$  は正にとることになるので、この成分は圧力が負となるなんとも奇妙なものであり、後に説明する暗黒エネルギーの一種と考えられる。

#### 1.1.4 宇宙の密度

次に宇宙に存在するエネルギー密度を考えていくが、その前によく使われる密度パラメータ  $\Omega$  を定義しよう。

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (1.1.45)$$

ここで、 $\rho_c = 3H^2/8\pi G$  は臨界密度と呼ばれる。その現在値は  $\rho_{c0} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} = (3.0 \times 10^{-3} \text{ eV})^4 h^2$  で与えられる。 $h$  は  $h = H_0/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$  で定義されるよく使われる量で、観測値は  $h = 0.674 \pm 0.014$  (68%) だ [12]。また曲率  $K$  に対し、 $\Omega_K = -K/a^2 H^2$  を定義すれば、Friedmann 方程式 (1.1.36) より、

$$\Omega + \Omega_K = 1, \quad (1.1.46)$$

を得る。従って、宇宙のエネルギー密度と時空の曲率には以下の関係がある。

$$\Omega \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases} \Leftrightarrow K \begin{cases} > 0 & \text{閉じた球面} \\ = 0 & \text{平坦} \\ < 0 & \text{開いた双曲面} \end{cases} \quad (1.1.47)$$

さて、仮に宇宙を満たしているエネルギー密度が、状態方程式  $P = w\rho$  を満たすとすると、連続の方程式 (1.1.41) に代入して、

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a}, \quad (1.1.48)$$

を得る。よってエネルギー密度とスケール因子には以下の関係がある。

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.1.49)$$

ここで宇宙論で重要なエネルギー成分として以下の3つをあげよう。

1. 物質 非相対論的粒子の総称。質量に比べ運動エネルギーが十分小さいので  $\rho$  に対し  $P$  は無視できる。つまり  $w = 0$ 。従って物質のエネルギー密度は  $\rho_M \propto a^{-3}$  と、体積膨張に反比例する。これは膨張によって粒子数が薄まる効果を表している。
2. 放射 相対論的粒子の総称。放射圧  $P$  は  $\rho/3$  で与えられるので、 $w = 1/3$ 。従って放射の密度は  $\rho_R \propto a^{-4}$  となる。これは粒子数が薄まる効果に加え、赤方偏移で波長が伸び、各粒子のエネルギーは  $a^{-1}$  に比例して減るためである。
3. 暗黒エネルギー  $w < -1/3$  の成分の総称。この成分で宇宙が満ちていると、加速度の方程式 (1.1.38) より、

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1+3w)\rho a > 0, \quad (1.1.50)$$

となり、宇宙は加速膨張することになる。1.1.3 項の最後に出てきた宇宙項  $\Lambda$  は、 $w = -1$  であったので暗黒エネルギーの一種である。宇宙項のエネルギー密度は  $\rho_\Lambda \propto a^0 = \text{const.}$  と膨張に対して全く影響を受けない。従って宇宙項は、時空そのものに付与される真空エネルギーのようなものだと考えられる。第2章で述べるインフレーションでは、これを利用して、スカラー場に真空エネルギーを持たせることで、急激な加速膨張を引き起こす。

仮にこれらの成分が混在していたとしても、成分間でエネルギーの交換がなければ、それぞれの  $\rho$  と  $a$  の関係は変わらない。宇宙が膨張し続けている場合、放射、物質、真空エネルギーの順でエネルギー密度の減少スピードが速いので、宇宙は、放射エネルギーが支配する放射優勢期、物質エネルギーが支配する物質優勢期、真空エネルギーが支配する真空エネルギー優勢期を順番に経験するはずである。物質と真空エネルギーそれぞれの密度パラメータ  $\Omega_M = \rho_M/\rho_c$ 、 $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_c$  の現在値は、観測により、 $\Omega_{M0} = 0.314 \pm 0.020$  (68%)、 $\Omega_{\Lambda0} = 0.686 \pm 0.020$  (68%) である [12]。物質と真空エネルギーが同じオーダーで存在するので、現在はちょうど物質優勢期から真空エネルギー優勢期への遷移期であることがわかる。従って放射成分  $\Omega_R$  は無視できる量しか存在しない。また  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$  になって

いるので、この宇宙は非常に高い精度で平坦 ( $K = 0$ ) であることがわかる。これは第 2 章で述べる平坦性問題につながっている。以降、特に断らなければ曲率  $K$  は無視し、宇宙は平坦時空であるとする。

### 1.1.5 Friedmann 方程式の解

今度はそれぞれ 1 種類の成分しかない宇宙に対し、スケール因子がどう時間変化するかを、平坦時空の Friedmann 方程式、

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.1.51)$$

を解いて求めてみよう。

1. 物質 物質エネルギーとスケール因子の関係は  $\rho_M \propto a^{-3}$  であったので、Friedmann 方程式に代入すると、 $\dot{a} \propto a^{-1/2}$ 、すなわち  $a \propto t^{2/3}$  を得る。ただし  $a = 0$  を  $t = 0$  としている。このような時空を Einstein-de Sitter 時空と呼ぶ。仮に我々の宇宙に物質しか存在していないとすると、現在の宇宙年齢は、

$$t_0 = \frac{2}{3} \left( \frac{\dot{a}}{a} \Big|_{t_0} \right)^{-1} = \frac{2}{3H_0} = 6.52h^{-1} \text{ Gyr}, \quad (1.1.52)$$

となる。

2. 放射 放射が優勢の場合は  $\rho_R \propto a^{-4}$  より  $a \propto \sqrt{t}$  を得る。この場合宇宙年齢は、

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (1.1.53)$$

3. 真空エネルギー 真空エネルギーが優勢なら  $\rho_\Lambda = \text{const.}$  より  $a \propto \exp(Ht)$  となる。この場合 Hubble パラメータ  $H$  は真に定数で、

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}}, \quad (1.1.54)$$

である。このように指数関数膨張する時空を de Sitter 時空という。

より一般には、Friedmann 方程式より、

$$dt = \frac{dx}{H_0 x \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K 0} x^{-2} + \Omega_{M 0} x^{-3} + \Omega_{R 0} x^{-4}}}, \quad (1.1.55)$$

が成り立つ。ただし  $x = a/a_0$  である。赤方偏移  $z$  が  $a/a_0 = 1/(1+z)$  を満たすことを使えば、 $z \rightarrow \infty$  を宇宙の始まり  $t = 0$  とした場合、赤方偏移  $z$  の光が放たれた時刻は、

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K 0} x^{-2} + \Omega_{M 0} x^{-3} + \Omega_{R 0} x^{-4}}}. \quad (1.1.56)$$

特に現在の宇宙年齢は  $z = 0$  とすれば求められ、

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K 0} x^{-2} + \Omega_{M 0} x^{-3} + \Omega_{R 0} x^{-4}}}, \quad (1.1.57)$$

となる。観測値を代入すれば、宇宙年齢は  $t_0 = 13.819$  Gyr である。

### 1.1.6 宇宙のエントロピー

放射成分の温度について議論しよう。十分初期の宇宙に遡れば、粒子数密度は濃くなるので、多くの粒子が頻繁に相互作用し、熱平衡に達していると考えられる。また、光子の数密度に対しバリオンの数密度 (正確にはバリオンの数密度から反バリオンの数密度を引いたもの) は非常に小さいことがわかっているため [2]、バリオン由来の化学ポテンシャルは無視できる。このような時、エネルギー密度や圧力、エントロピー密度はそれぞれ温度のみの関数、 $\rho(T)$ 、 $P(T)$ 、 $s(T)$  で表される。

個々の種類  $i$  の粒子のエネルギー密度は、その粒子の自由度を  $g_i$ 、温度を  $T_i$  として、

$$\begin{aligned} \rho_i &= g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p}{e^{p/T_i} \pm 1}, \quad \begin{cases} - & \text{ボソン} \\ + & \text{フェルミオン} \end{cases} \\ &= \frac{g_i T_i^4}{2\pi^2} \int dx \frac{x^3}{e^x \pm 1}, \quad x = \frac{p}{T_i} \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 & \text{ボソン} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 & \text{フェルミオン} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

である。従って、全放射エネルギーは、

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (1.1.59)$$

ただし  $g_*$  は、

$$g_* = \sum_{\text{ボソン}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{フェルミオン}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4, \quad (1.1.60)$$

であり、有効自由度と呼ばれる。

熱力学第2法則より、あらゆる断熱的变化によって起こる、体積  $V$  中のエントロピーの変化は次で表される。

$$d(s(T)V) = \frac{d(\rho(T)V) + P(T)dV}{T}. \quad (1.1.61)$$

$dV$  の係数を見れば、

$$s(T) = \frac{\rho(T) + P(T)}{T}, \quad (1.1.62)$$

である。ここで、 $V = a^3$  とすれば、全エントロピー  $S = s(T)a^3$  の変化は、式 (1.1.61) より、

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}d(\rho a^3) + \frac{P}{T}da^3 \\ \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{T} \frac{d(\rho a^3)}{dt} + \frac{P}{T} \frac{da^3}{dt}. \end{aligned} \quad (1.1.63)$$

連続の方程式 (1.1.40) を用いれば、

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (1.1.64)$$

となり、確かに宇宙ではエントロピーが保存する断熱膨張をしていることがわかる。

種類  $i$  の粒子が熱平衡に達していて、放射成分になっているとすると、エネルギー密度と圧力には、

$$P_i = \frac{1}{3}\rho_i, \quad (1.1.65)$$

の関係がある。従って、 $i$  の持つエントロピー密度は、

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{T_i}(\rho_i + P_i) \\ &= \frac{4\rho_i}{3T_i} \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi^2}{45}g_i T_i^3 & \text{ボソン} \\ \frac{7}{8} \frac{2\pi^2}{45}g_i T_i^3 & \text{フェルミオン} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.66)$$

となる。よって全エントロピー密度は、

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45}g_{*s}T^3, \quad (1.1.67)$$

ただし  $g_{*s}$  は、

$$g_{*s} = \sum_{\text{ボソン}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{フェルミオン}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3, \quad (1.1.68)$$

であり、エントロピーに対する有効自由度と呼ばれる。

上述のように全エントロピー  $S = a^3 s(T)$  は保存されるので、(もし  $g_{*s}$  が一定ならば)  $a^3 T^3 \propto a^3 s(T)$  も一定である。従って、

$$T \propto \frac{1}{a}, \quad (1.1.69)$$

と、温度はスケール因子に反比例することがわかる。

特に光子の温度について考察しよう。光子が熱平衡状態から脱結合して自由運動 (free streaming) するようになる時期を  $t_*$  と呼ぼう (後述する再結合期である)。 $t < t_*$  では光子は熱平衡にあるので、その運動量分布は Planck 分布に従う。

$$f(p) \propto \frac{1}{e^{p/T} - 1}. \quad (1.1.70)$$

$t = t_*$  時も同様である。

$$f(p_*) \propto \frac{1}{e^{p_*/T_*} - 1}. \quad (1.1.71)$$

$t > t_*$  では赤方偏移によって、光子の波長はスケール因子に比例して伸び  $\lambda \propto a$ 、よって運動量は  $p = 1/\lambda \propto a^{-1}$  とスケール因子に反比例する。従って、

$$p = \frac{a_*}{a} p_*, \quad (1.1.72)$$

であり、運動量分布は、

$$f(p) \propto \frac{1}{e^{\frac{p}{T_*} \frac{a}{a_*}} - 1}, \quad (1.1.73)$$

となる。すなわち、温度  $T$  を、

$$T = \frac{a_*}{a} T_*, \quad (1.1.74)$$

と定義すれば、運動量分布は再び、

$$f(p) \propto \frac{1}{e^{p/T} - 1}, \quad (1.1.75)$$

と Planck 分布に戻る。以上より、光子が熱平衡から脱結合した後も、光子の温度は式 (1.1.74) で定義され、やはり  $T \propto a^{-1}$  の関係を保つ。これが後述する宇宙背景放射の温度と呼ばれるものである。

### 1.1.7 ホライズン

現代宇宙論では2種類のホライズンが示される。1つは過去に因果関係を持ち得た領域、もう1つは未来に因果関係を持ち得る領域で、それぞれ粒子ホライズンと事象ホライ



ズンと呼ぶ。ホライズンの概念は、後述するようにインフレーションにおいても非常に重要である。

ビッグバンが  $t = 0$  に始まったとすると、式 (1.1.25) より、時刻  $t$  に原点で受け取れるのは以下で決まる  $r_{\max}(t)$  内から出た信号だけである。

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.1.76)$$

従ってこれが共動座標での粒子ホライズンであり、この物理的距離は、

$$d_{\max}(t) = a(t) \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.1.77)$$

と計算される。例えば、放射優勢期であれば  $a(t) \propto t^{1/2}$  なので、 $d_{\max}(t) = 2t = 1/H$  であるし、物質優勢期が式 (1.1.77) の積分の大部分を占めるとすれば、 $a(t) \propto t^{2/3}$  より、 $d_{\max}(t) = 3t = 2/H$  である。ちなみにある時刻の Hubble 半径は  $1/H$  で定義されるが、この距離離れると Hubble の法則 (1.1.23) より相対的な膨張測度が 1、つまり光速になる距離である。上 2 つの場合の粒子ホライズンはどちらも Hubble 半径と同じオーダーであることがわかるので、Hubble 半径  $1/H$  をホライズンと呼んでしまうこともしばしばある。

現在の粒子ホライズンは、式 (1.1.55) より、

$$d_{\max}(t_0) = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{K 0} x^{-2} + \Omega_{M 0} x^{-3}}}, \quad (1.1.78)$$

である。ただし放射成分は非常に少ないので無視した。

純 de Sitter 時空  $a(t) \propto e^{Ht}$  の場合は  $d_{\max}(t) = \frac{1}{H}(e^{Ht} - 1) \simeq \frac{1}{H}e^{Ht}$  となり、粒子ホライズンは指数関数的に広がる。これは、純 de Sitter の場合、過去に因果関係を持った領域が、急激な膨張によって指数関数的に広げられていることを表している。この事実は、後述するが第 2 章で扱うインフレーションの動機にもなってくる。

一方、現在時刻  $t$  から無限未来までに因果関係を持つことができる領域は、

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.1.79)$$

で与えられる。もちろん、宇宙が時刻  $T$  で再崩壊するならば、

$$\int_t^T \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (1.1.80)$$

である。従って事象ホライズンの物理的距離は、

$$d_{\max}(t) = a(t) \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1.1.81)$$

となる。仮に真空エネルギーが存在しなければ、 $a(t)$  は  $t^{2/3}$  で膨張し、 $d_{\text{MAX}}(t)$  は発散する。これは物質優勢期では宇宙は減速膨張するので、どれだけ遠くの点でも十分時間をかければ信号を交わすことができることを意味する。しかし、真空エネルギーが存在するならば、 $a(t)$  は最終的に  $e^{Ht}$ ,  $H = H_0 \Omega_{\Lambda 0}^{1/2}$  \*1 で膨張し、事象ホライズンは  $d_{\text{MAX}}(\infty) = 1/H$  の値に漸近する。真空エネルギー優勢期、あるいは de Sitter 宇宙では、宇宙は指数関数膨張しており、一度 Hubble 半径  $1/H$  を超えると二度と戻って来られないということである。

Fourier 空間で考えたとき、共動波数  $k$  は定数であるが、共動 Hubble スケール  $aH$  は時間変化する。考えているモードが  $k < aH$  を満たす場合、その波長  $\sim 1/k$  は Hubble 半径  $1/aH$  を超えており、スーパーホライズンであるという。逆に  $k > aH$  の場合をサブホライズンという。

### 1.1.8 宇宙の熱史

ここでは宇宙の歴史の中で起こった重要な出来事を、軽く述べる程度に抑えながら挙げていこう。

まず宇宙はビッグバンとして、何らかの非常に高温高密度状態から始まったとする。仮にこのとき宇宙の成分が熱平衡から外れていたとしても、宇宙は十分に高温高密度ですぐに熱平衡に達するとする。このとき宇宙は放射優勢期である。

宇宙が膨張して、熱平衡温度が  $T \sim 2 \text{ MeV}$  程度に下がってくると、ニュートリノの相互作用の時間スケールより、膨張の時間スケール  $H^{-1}$  の方が短くなり、ニュートリノが熱平衡から脱結合する。これをニュートリノ脱結合 (neutrino decoupling) という。

温度がさらに下がって電子の質量  $511 \text{ keV}$  程度になると、電子と陽電子の数密度が Boltzmann 因子によって抑えられ、急激に減少する。これを電子陽電子対消滅 (electron-positron annihilation) という。このとき電子と陽電子が持っていたエントロピーが放出されるので、熱平衡温度がやや上昇する\*2。熱平衡から脱結合したニュートリノはこの影響を受けないので、このときからニュートリノの温度より光子の温度の方がやや高くなる。

またこの少し前  $T \sim 1 \text{ MeV}$  から  $T \sim 0.01 \text{ MeV}$  に亘って、陽子と中性子の一部が結合して、ヘリウムやその他、重水素やリチウム等に変換される。これをビッグバン元素合成 (big bang nucleosynthesis, BBN) という。各元素の存在量を決める理論的パラメータは、バリオン数密度 (バリオンの数密度から反バリオンの数密度を引いたもの)  $n_B$  と光子の数密度  $n_\gamma$  の比  $\eta_B = n_B/n_\gamma$  のみであり、観測される元素存在量から  $\eta_B \sim 5 \times 10^{-9}$  とされる [2]。

\*1 Friedmann 方程式より  $H^2 \propto \rho$  であったことを思い出そう。

\*2 宇宙膨張の温度減少には勝てないので、温度減少が緩められる、という方が正しいか。

さらに温度が下がり、 $T \sim 1 \text{ eV}$ 、あるいは赤方偏移が  $z \sim 3000$  の時、いよいよ放射と物質のエネルギー密度が同じになる。この時期を放射物質等密度期 (matter-radiation equality) という。これ以降宇宙は物質優勢期である。

$T \sim 0.3 \text{ eV}$ 、あるいは赤方偏移  $z \sim 1100$  程度の時、宇宙に存在する自由電子は陽子と結合し水素原子となる。これを再結合 (recombination) という。このとき重要なのは、それまで熱平衡状態だった光子が Compton 散乱を行えなくなり、熱平衡から脱して、以降直進することとなる点である。すなわち再結合以降宇宙は光に対して透明になる。このことを宇宙の晴れ上がりと呼ぶ。晴れ上がり直前に最後に散乱して、現在まで直進してきた光の一部は、地球上で宇宙背景放射 (cosmic microwave background, CMB) として観測される。CMB が最後に散乱した時刻の等時刻面は地球からみて球面になるので、これを最終散乱面 (last scattering surface, LSS) という。これらが起こった時代は宇宙年齢にするとなかだか 38 万年で、現在の宇宙年齢 138 億年から比べると十分短い。従って最終散乱面は現在の粒子ホライズン  $\sim H_0^{-1}$  にほぼ一致する。

## 1.2 宇宙論的ゆらぎ

前節では宇宙は一様等方であるとして解析した。もちろんこれは近似に過ぎず、銀河や星等の宇宙で興味深いものの多くを無視してしまっている。この節では、一様等方宇宙からの線形のずれについて一般的に扱う。本論文では、インフレーションによって作られるゆらぎの種が主題であるので、それを理解するための準備という側面が強い。

まずはゆらぎの方程式を立て、次にゲージの選び方について述べ、最後に保存するゆらぎの量について扱おう。

### 1.2.1 場の方程式

本節では宇宙の一様等方からのずれは非常に小さいと想定し、線形ゆらぎとして扱う。また宇宙は平坦 ( $K = 0$ ) であるとする。このとき全計量は、

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (1.2.1)$$

ただし、 $\bar{g}_{\mu\nu}$  はゆらぎのない、 $K = 0$  の FLRW 計量、

$$\bar{g}_{00} = -1, \quad \bar{g}_{i0} = \bar{g}_{0i} = 0, \quad \bar{g}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \quad (1.2.2)$$

であり、 $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  は小さい摂動である。以降バーが付いた変数はゆらぎのない量を表すものとする。一般の行列  $M$  の逆の摂動は  $\delta M^{-1} = -M^{-1}(\delta M)M^{-1}$  で与えられるので、計量の逆は以下の  $h^{\mu\nu}$  でゆらぐ。

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}. \quad (1.2.3)$$

成分で表すと、

$$h^{ij} = -a^{-4}h_{ij}, \quad h^{i0} = a^{-2}h_{i0}, \quad h^{00} = -h_{00}. \quad (1.2.4)$$

式 (1.2.3) の最後の負号が、 $\delta g^{\mu\nu}$  は単に  $\delta g_{\mu\nu}$  の添字を  $\bar{g}^{\mu\nu}$  で上げたものではないことを表している。

アファイン接続の摂動は、

$$\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho}[-2h_{\rho\sigma}\bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\sigma} + \partial_{\lambda}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\lambda} - \partial_{\rho}h_{\lambda\nu}]. \quad (1.2.5)$$

$K = 0$  ではゆらぎのないアファイン接続のうち、消えない項は、

$$\bar{\Gamma}_{j0}^i = \bar{\Gamma}_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad (1.2.6)$$

のみである。よって接続の摂動の成分は、

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2a^2}(-2a\dot{a}h_{i0}\delta_{jk} + \partial_k h_{ij} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk}), \\ \delta\Gamma_{j0}^i &= \frac{1}{2a^2}\left(-\frac{2\dot{a}}{a}h_{ij} + \dot{h}_{ij} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0}\right), \\ \delta\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(2a\dot{a}h_{00} - \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0} + \dot{h}_{ij}), \\ \delta\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2a^2}(2\dot{h}_{i0} - \partial_i h_{00}), \\ \delta\Gamma_{i0}^0 &= \frac{\dot{a}}{a}h_{i0} - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \\ \delta\Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2}\dot{h}_{00}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

特に、

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} = \partial_{\mu}\left[\frac{1}{2a^2}h_{ii} - \frac{1}{2}h_{00}\right], \quad (1.2.8)$$

である。Ricci テンソルの摂動は、

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\bar{\Gamma}_{\kappa\eta}^{\nu} + \delta\Gamma_{\kappa\eta}^{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\eta} - \delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\bar{\Gamma}_{\nu\eta}^{\nu} - \delta\Gamma_{\nu\eta}^{\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\kappa}^{\eta}, \quad (1.2.9)$$

であり、その成分は、

$$\begin{aligned}
\delta R_{jk} &= -\frac{1}{2}\partial_i\partial_k h_{00} - (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{jk}h_{00} - \frac{1}{2}a\dot{a}\delta_{jk}\dot{h}_{00} \\
&\quad + \frac{1}{2a^2}(\nabla^2 h_{jk} - \partial_i\partial_j h_{ik} - \partial_i\partial_k h_{ij} + \partial_j\partial_k h_{ii}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a}(\dot{h}_{jk} - \delta_{jk}\dot{h}_{ii}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2}(-2h_{jk} + \delta_{jk}h_{ii}) + \frac{\dot{a}}{a}\delta_{jk}\partial_i h_{i0} \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial_i\dot{h}_{k0} + \partial_k\dot{h}_{j0}) + \frac{\dot{a}}{2a}(\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}), \\
\delta R_{0j} &= \delta R_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2}(\nabla^2 h_{j0} - \partial_j\partial_i h_{i0}) - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2}\right)h_{j0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}(\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj})\right], \\
\delta R_{00} &= \frac{1}{2a^2}\nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2}\partial_i\dot{h}_{i0} \\
&\quad + \frac{1}{2a^2}\left[\ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a}\dot{h}_{ii} + 2\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a}\right)h_{ii}\right]. \tag{1.2.10}
\end{aligned}$$

さて、Einstein 方程式 (1.1.32) のトレースをとると、

$$R = -8\pi GT^\lambda{}_\lambda, \tag{1.2.11}$$

を得るので、Einstein 方程式は次のように書き換えることもできる。

$$R_{\mu\nu} = -8\pi GS_{\mu\nu}. \tag{1.2.12}$$

ただし、

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda. \tag{1.2.13}$$

従ってソーステンソル  $S_{\mu\nu}$  のゆらぎは、

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta T^\lambda{}_\lambda - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\bar{T}^\lambda{}_\lambda, \tag{1.2.14}$$

となる。宇宙の成分として完全流体を想定はしないが、1.1.3 項で見たように、ゆらぎのないエネルギー運動量テンソル  $\bar{T}^{\mu\nu}$  は回転と並進対称性より、完全流体の形をしていなければならないのであった。

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{P}\bar{g}_{\mu\nu} + (\bar{P} + \bar{\rho})\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu. \tag{1.2.15}$$

$\bar{\rho}(t), \bar{P}(t), \bar{u}^\mu$  はそれぞれゆらぎのないエネルギー密度、圧力、4元速度であり、 $\bar{u}^0 = 1, \bar{u}^i = 0$  を満たす。 $\bar{\rho}$  と  $\bar{P}$  はそれぞれ Friedmann 方程式 (1.1.36) と加速度の方程式

(1.1.38) を満たす。

$$\bar{\rho} = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad \bar{P} = -\frac{1}{8\pi G} \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (1.2.16)$$

従ってゆらぎのないエネルギー-運動量テンソルのトレースは、

$$\bar{T}^\lambda{}_\lambda = 3\bar{P} - \bar{\rho} = -\frac{3}{4\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (1.2.17)$$

となる。よって式 (1.2.14) は、

$$\begin{aligned} \delta S_{jk} &= \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T^\lambda{}_\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jk}, \\ \delta S_{j0} &= \delta T_{j0} + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{j0}, \\ \delta S_{00} &= \delta T_{00} + \frac{1}{2} \delta T^\lambda{}_\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{00}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

以上より、Einstein 方程式 (1.2.12) は次のようになる。

$$\begin{aligned} -8\pi G \left( \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T^\lambda{}_\lambda \right) &= -\frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{00} - (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{00} \\ &\quad - \frac{1}{2} a \dot{a} \delta_{jk} \dot{h}_{00} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jk} - \partial_i \partial_j h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{ij} + \partial_j \partial_k h_{ii}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3\ddot{a}}{a} \right) h_{jk} + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \delta_{jk} h_{ii} \\ &\quad + \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} \partial_i h_{i0} + \frac{1}{2} (\partial_j \dot{h}_{k0} + \partial_k \dot{h}_{j0}) + \frac{\dot{a}}{2a} (\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}), \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$$\begin{aligned} -8\pi G \delta T_{j0} &= \frac{\dot{a}}{a} \partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{j0} - \partial_j \partial_i h_{i0}) + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \right) h_{j0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) \right], \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} -8\pi G \left( \delta T_{00} + \frac{1}{2} \delta T^\lambda{}_\lambda \right) &= \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{i0} \\ &\quad + \frac{1}{2a^2} \left[ \ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right] + 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{00}. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

エネルギー-運動量保存則はもちろんこれらの式から導かれるが、 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$  から別に導いてしまったほうが簡単である。摂動の 1 次では、

$$\partial_\mu \delta T^\mu{}_\nu + \bar{\Gamma}^\mu{}_{\mu\lambda} \delta T^\lambda{}_\nu - \bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} \delta T^\mu{}_\lambda + \delta \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} \bar{T}^\lambda{}_\nu - \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \bar{T}^\mu{}_\lambda = 0. \quad (1.2.22)$$

ここで上と下の添字が混ざった  $\delta T^\mu{}_\nu$  は、摂動の 1 次では次のようになる。

$$\delta T^\mu{}_\nu = \bar{g}^{\mu\lambda} [\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa} \bar{T}^\kappa{}_\nu]. \quad (1.2.23)$$

保存則 (1.2.22) で  $\nu$  を空間添字  $j$  にすれば、運動量保存則、

$$\begin{aligned} & \partial_0 \delta T^0_j + \partial_i \delta T^i_j \\ & + \frac{2\dot{a}}{a} \delta T^0_j - a\dot{a} \delta T^j_0 - (\bar{\rho} + \bar{P}) \left( \frac{1}{2} \partial_j h_{00} - \frac{\dot{a}}{a} h_{j0} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

が得られるし、 $\nu = 0$  とすれば、エネルギー保存則、

$$\begin{aligned} & \partial_0 \delta T^0_0 + \partial_i \delta T^i_0 \\ & + \frac{3\dot{a}}{a} \delta T^0_0 - \frac{\dot{a}}{a} \delta T^i_i - \left( \frac{\bar{\rho} + \bar{P}}{2a^2} \right) \left( -\frac{2\dot{a}}{a} h_{ii} + \dot{h}_{ii} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

を得る。

これらの結果はそのまま扱うには複雑すぎる。そこでこれらをスカラー成分、零発散ベクトル成分、零トレース零発散テンソル成分にわけて考えよう。計量の摂動は常に以下の形に分解できる。

$$h_{00} = -E, \quad (1.2.26)$$

$$h_{i0} = a \left[ \frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i \right], \quad (1.2.27)$$

$$h_{ij} = a^2 \left[ A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij} \right]. \quad (1.2.28)$$

ここで  $A, B, C_i, D_{ij} = D_{ji}, E, F, G_i$  はそれぞれ  $\mathbf{x}$  と  $t$  の関数であり、以下の条件を満たす。

$$\frac{\partial C_i}{\partial x^i} = \frac{\partial G_i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad D_{ii} = 0. \quad (1.2.29)$$

$h_{\mu\nu}$  は  $4 \times 4$  対称行列なので自由度は 10 なのに対し、 $A, B, E, F$  で 4、 $C_i, G_i$  で 6、 $D_{ij}$  で 6 の全部で 16 自由度があるが、拘束 (1.2.29) の 6 本の条件式があるので、自由度は確かに合っている。

同様にエネルギー運動量テンソルも分解しよう。先に完全流体、

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho + P) u_\mu u_\nu, \quad (1.2.30)$$

について考えよう。4 元速度は以下のように規格化されているので、

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1, \quad (1.2.31)$$

$\bar{u}_i = 0, \bar{u}_0 = -1$  を思い出すと、拘束、

$$\delta u^0 = \delta u_0 = h_{00}/2, \quad (1.2.32)$$

を得るが、 $\delta u_i$  はまだ独立な力学変数である。従って摂動の 1 次では、

$$\begin{aligned}\delta T_{ij} &= \bar{P}h_{ij} + a^2\delta_{ij}\delta P, \\ \delta T_{i0} &= \bar{P}h_{i0} - (\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_i, \\ \delta T_{00} &= -\bar{\rho}h_{00} + \delta\rho,\end{aligned}\tag{1.2.33}$$

となる。より一般の流体の場合にはもっと複雑になるだろう。事実、対称行列  $\delta T_{\mu\nu}$  の自由度が 10 であるのに対し、右辺の力学変数は  $\delta\rho, \delta P, \delta u_i$  の 5 自由度しかない。 $\delta u_i$  をスカラー成分  $\delta u$  と零発散ベクトル成分  $\delta u_i^V$  に分解しておいて、さらに足りない力学変数を計量の分解 (1.2.26)-(1.2.28) を参考に付け足せば、

$$\begin{aligned}\delta T_{ij} &= \bar{P}h_{ij} + a^2[\delta_{ij}\delta P + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T], \\ \delta T_{i0} &= \bar{P}h_{i0} - (\bar{\rho} + \bar{P})(\partial_i\delta u + \delta u_i^V), \\ \delta T_{00} &= -\bar{\rho}h_{00} + \delta\rho,\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

となる。ただし  $\pi_i^V, \pi_{ij}^T, \delta u_i^V$  は以下の拘束条件を満たす。

$$\partial_i\pi_i^V = \partial_i\delta u_i^V = 0, \quad \partial_i\pi_{ij}^T = 0, \quad \pi_{ii}^T = 0.\tag{1.2.35}$$

ここで導入された  $\pi^S, \pi^V, \pi^T$  は、完全流体からのずれを表す、非等方慣性項と呼ばれる。保存則を書くために必要な上付きと下付きが混ざった  $\delta T^\mu{}_\nu$  の表式も与えておこう。

$$\begin{aligned}\delta T^i{}_j &= \delta_{ij}\delta P + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T, \\ \delta T^i{}_0 &= a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{P})(a\partial_i F + aG_i - \partial_i\delta u - \delta u_i^V), \\ \delta T^0{}_i &= (\bar{\rho} + \bar{P})(\partial_i\delta u + \delta u_i^V), \quad \delta T^0{}_0 = -\delta\rho, \\ \delta T^\lambda{}_\lambda &= 3\delta P - \delta\rho + \nabla^2\pi^S.\end{aligned}\tag{1.2.36}$$

これで準備がそろったので 3 つのクラスであるスカラー、ベクトル、テンソルそれぞれに対して運動方程式を書き下せる。

### スカラー成分

スカラー成分は分解後もまだ非常に複雑であり、変数は  $E, F, A, B, \delta\rho, \delta P, \pi^S, \delta u$  の 8 つもある。式 (1.2.19) の  $\delta_{jk}$  に比例する部分から、

$$\begin{aligned}-4\pi G a^2[\delta\rho - \delta P - \nabla^2\pi^S] &= \frac{1}{2}a\dot{a}\dot{E} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})E + \frac{1}{2}\nabla^2 A - \frac{a}{2}a^2\ddot{A} \\ &\quad - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}a\dot{a}\nabla^2\dot{B} + \dot{a}\nabla^2 F.\end{aligned}\tag{1.2.37}$$

一方  $S$  を何らかのスカラーとして  $\partial_j\partial_k S$  の形をしている部分からは、

$$\partial_j\partial_k[16\pi G a^2\pi^S + E + A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B} + 2a\dot{F} + 4\dot{a}F] = 0.\tag{1.2.38}$$



式 (1.2.20) の  $\partial_j S$  の形をしている部分から、

$$8\pi G a(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_j \delta u = -\dot{a}\partial_j E + a\partial_j \dot{A}. \quad (1.2.39)$$

最後に式 (1.2.21) から、

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2 \pi^S) = & -\frac{1}{2a^2}\nabla^2 E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} - \frac{1}{a}\nabla^2 \dot{F} - \frac{\dot{a}}{a^2}\nabla^2 F \\ & + \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E + \frac{1}{2}\nabla^2 \ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2 \dot{B}, \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

を得る。

また運動量保存則 (1.2.24) の  $\partial_j$  の部分は、

$$\partial_j[\delta P + \nabla^2 \pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})E] = 0, \quad (1.2.41)$$

であるし、エネルギー保存則 (1.2.25) からは、

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) + \nabla^2 \left[ -a^{-1}(\bar{\rho} + \bar{P})F + a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S \right] \\ + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_0[3A + \nabla^2 B] = 0, \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

を得る。

ベクトル成分

ベクトル成分には  $G_i, C_i, \delta u_i^V, \pi_i^V$  の 4 つの零発散ベクトルが存在する。式 (1.2.19) の  $\partial_k V_j$  ( $V_j$  は  $\partial_j V_j = 0$  を満たす何らかのベクトル) の形の部分から、

$$\partial_k[16\pi G a^2 \pi_j^V - a^2 \ddot{C}_j - 3a\dot{a}\dot{C}_j + a\dot{G}_j + 2\dot{a}G_j] = 0, \quad (1.2.43)$$

が得られ、式 (1.2.20) の  $V_j$  (やはり  $\partial_j V_j = 0$  を満たす) の形の部分から、

$$8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})a\delta u_j^V = \frac{1}{2}\nabla^2 G_j - \frac{a}{2}\nabla^2 \dot{C}_j, \quad (1.2.44)$$

を得る。運動量保存 (1.2.24) の零発散部分は、

$$\nabla^2 \pi_j^V + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^V] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^V = 0, \quad (1.2.45)$$

となる。

特に完全流体  $\pi_i^V = 0$  について考えると、式 (1.2.45) は  $(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^V$  が  $1/a^3$  で減衰することを表している。またこのとき、式 (1.2.43) と (1.2.44) のどちらも  $G_j - a\dot{C}_j$  が  $1/a^2$  で減衰することを意味する。実は  $G_j - a\dot{C}_j$  は計量摂動のベクトル成分のうちゲージ不変な唯一の組み合わせだ (式 (1.2.57) 参照)。これらの減衰からベクトル成分は宇宙論にあまり大きな寄与をしない。

## テンソル成分

テンソル成分は  $D_{ij}$  と  $\pi_{ij}^T$  のみである。場の方程式は1つだけで、式 (1.2.19) の零発散零トレース部分から以下の重力波の波動方程式を得る。

$$-16\pi G a^2 \pi_{ij}^T = \nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3a\dot{a}\dot{D}_{ij}. \quad (1.2.46)$$

これらの方程式は完全系を成していない。その理由の1つが次節で見るとおり一般座標変換 (ゲージ) の自由度があるからである。次節ではゲージ変換と、便利な Newton ゲージについて述べる。

### 1.2.2 ゲージ変換

前節で導いた方程式には2つほどうれしくない点がある。1つ目はスカラー、ベクトル、テンソル成分に分解したにも関わらず、スカラー成分の方程式はいまだに非常に複雑である点である。もう1つは座標変換の自由度から来る非物理的成分が方程式の解に含まれてしまっている点である。2つ目の問題はゲージを固定することによって解決されるし、同時に1つ目の問題も軽減されるようなゲージがあればとてもうれしい。

時空座標変換、

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (1.2.47)$$

を考えよう。 $\epsilon^\mu(x)$  は  $h_{\mu\nu}$  や  $\delta\rho$  などと同じ意味で小さい。すなわちこれらすべてについて1次の摂動を考える。この変換によって計量は、

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\kappa}(x) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}, \quad (1.2.48)$$

の変換を受ける。これによって場の摂動だけでなく、座標点やゆらぎのない場まで影響を受けてしまう。それよりはむしろ座標点やゆらぎのない場は変更せず、その代償を場の摂動に押し付けてしまう方が楽である。このとき場の摂動が受ける変換をよくゲージ変換と呼ぶ。これを行うには座標変換 (1.2.47) を行った後に、座標のプライムを取り、 $g_{\mu\nu}(x)$  全体の変化は  $h_{\mu\nu}(x)$  の変化とみなせばよい。場の方程式はゲージ変換  $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h_{\mu\nu}(x) + \Delta h_{\mu\nu}(x)$  によって不変とならなければならない。ただし  $\Delta h_{\mu\nu}(x)$  は、

$$\Delta h_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x), \quad (1.2.49)$$

である。このときゆらぎのない FLRW 計量  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  は変化させない。式 (1.2.49) は同一座標点の引き算であることに注意しよう。 $\epsilon(x)$  と  $h_{\mu\nu}(x)$  の 1 次では、

$$\begin{aligned}\Delta h_{\mu\nu}(x) &= g'_{\mu\nu}(x') - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda(x) - g_{\mu\nu}(x) \\ &= -\bar{g}_{\lambda\mu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\nu} - \bar{g}_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda,\end{aligned}\quad (1.2.50)$$

あるいはより詳しく見ると、

$$\Delta h_{ij} = -\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x^i} + 2a\dot{a}\delta_{ij}\epsilon_0,\quad (1.2.51)$$

$$\Delta h_{i0} = -\frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\epsilon_i,\quad (1.2.52)$$

$$\Delta h_{00} = -2\frac{\partial \epsilon_0}{\partial t}.\quad (1.2.53)$$

ただしすべての量は同一座標点で評価しており、また 1 次の摂動では添字の上げ下げはゆらぎのない FLRW 計量  $\bar{g}_{\mu\nu}$  で行われ、例えば  $\epsilon_0 = -\epsilon^0$ ,  $\epsilon_i = a^2\epsilon^i$  である。エネルギー運動量テンソルも同時にゲージ変換  $\delta T_{\mu\nu}(x) \rightarrow \delta T_{\mu\nu}(x) + \Delta\delta T_{\mu\nu}(x)$  される。式 (1.2.50) と同様に、

$$\Delta\delta T_{\mu\nu} = -\bar{T}_{\lambda\mu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - \bar{T}_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{T}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda(x),\quad (1.2.54)$$

あるいは、

$$\begin{aligned}\Delta\delta T_{ij} &= -\bar{P} \left( \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \bar{P}) \delta_{ij} \epsilon_0, \\ \Delta\delta T_{i0} &= -\bar{P} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^i} + 2\bar{P} \frac{\dot{a}}{a} \epsilon_i, \\ \Delta\delta T_{00} &= 2\bar{\rho} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial t} + \dot{\bar{\rho}} \epsilon_0.\end{aligned}\quad (1.2.55)$$

これらゲージ変換をスカラー、ベクトル、テンソル成分で表すために、 $\epsilon^\mu$  の空間部分もスカラー成分と零発散ベクトル成分に分けておこう。

$$\epsilon_i = \partial_i \epsilon^S + \epsilon_i^V, \quad \partial_i \epsilon_i^V = 0.\quad (1.2.56)$$

このとき、変換 (1.2.51)-(1.2.53) や (1.2.55) は、式 (1.2.26)-(1.2.28) で定義される計量摂動成分のゲージ変換を以下のように与えるし、

$$\begin{aligned}\Delta A &= \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon_0, \quad \Delta B = -\frac{2}{a^2} \epsilon^S, \\ \Delta C_i &= -\frac{1}{a^2} \epsilon_i^V, \quad \Delta D_{ij} = 0, \quad \Delta E = 2\dot{\epsilon}_0, \\ \Delta F &= \frac{1}{a} \left( -\epsilon_0 - \dot{\epsilon}^S + \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon^S \right), \quad \Delta G_i = \frac{1}{a} \left( -\epsilon_i^V + \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon_i^V \right),\end{aligned}\quad (1.2.57)$$

式 (1.2.34) で定義される圧力、エネルギー密度、速度ポテンシャルの摂動のゲージ変換を、

$$\Delta\delta P = \dot{P}\epsilon_0, \quad \Delta\delta\rho = \dot{\rho}\epsilon_0, \quad \Delta\delta u = -\epsilon_0, \quad (1.2.58)$$

で与える。その他のエネルギー運動量テンソルの要素のゲージ変換はゼロである。

$$\Delta\pi^S = \Delta\pi_i^V = \Delta\pi_{ij}^T = \Delta\delta u_i^V = 0. \quad (1.2.59)$$

完全流体の条件  $\pi^S = \pi_i^V = \pi_{ij}^T = 0$  や、非回転流の条件  $\delta u_i^V = 0$  はゲージ不変であるということである。

摂動量のゲージ変換が得られたので、あとはこれで好きなゲージに固定するだけである。ここからはスカラー成分のみを見て行くが、以下によく使われる Newton ゲージを紹介する。

### Newton ゲージ

ここでは、まず  $\epsilon^S$  を  $B = 0$  となるように選んで、 $\epsilon_0$  を  $F = 0$  となるように選ぶ。これらの選択はともに一意なのでもうゲージ変換の自由度はない。このゲージを Newton ゲージと呼ぶ。慣例的にこのゲージでは  $E$  と  $A$  を以下のように記す。

$$E = 2\Phi, \quad A = -2\Psi. \quad (1.2.60)$$

従って摂動の入った計量は、

$$g_{00} = -1 - 2\Phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2\delta_{ij}[1 - 2\Psi], \quad (1.2.61)$$

となる。ただしスカラー成分しか考えていないことに気をつけよう。重力の方程式 (1.2.37)-(1.2.40) は、

$$-4\pi Ga^2[\delta\rho - \delta P - \nabla^2\pi^S] = a\dot{a}\dot{\Phi} + (4\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\Phi - \nabla^2\Psi + a^2\ddot{\Psi} + 6a\dot{a}\dot{\Psi}, \quad (1.2.62)$$

$$-8\pi Ga^2\partial_i\partial_j\pi^S = \partial_i\partial_j[\Phi - \Psi], \quad (1.2.63)$$

$$4\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_i\delta u = -\dot{a}\partial_i\Phi - a\partial_i\dot{\Psi}, \quad (1.2.64)$$

$$4\pi G(\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2\pi^S) = \frac{1}{a^2}\nabla^2\Phi + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + 3\ddot{\Psi} + \frac{6\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{6\ddot{a}}{a}\Phi, \quad (1.2.65)$$

となるし、運動量とエネルギーの保存則 (1.2.41)、(1.2.42) は、

$$\begin{aligned} \delta P + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u + (\bar{\rho} + \bar{P})\Phi &= 0, \\ \delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] - 3(\bar{\rho} + \bar{P})\dot{\Psi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

となる。

式 (1.2.65) から  $3/a^2$  をかけた式 (1.2.62) を引いて、 $\pi^S$  と  $\Phi$  を消すために式 (1.2.63) と (1.2.64) を使うと以下を得る。

$$a^3 \delta \rho - 3H a^3 (\bar{\rho} + \bar{P}) \delta u - \left( \frac{a}{4\pi G} \right) \nabla^2 \Psi = 0. \quad (1.2.67)$$

ここでゲージ不変な密度ゆらぎ  $\Delta_\rho$ <sup>\*3</sup> を以下で定義しよう。

$$\Delta_\rho = \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} - 3H(1 + \omega) \delta u. \quad (1.2.68)$$

ただし  $\omega = \bar{P}/\bar{\rho}$  である。これが本当にゲージ不変であるかは、実際に  $\delta \rho$  と  $\delta u$  のゲージ変換 (1.2.58) と連続の式 (1.1.41) を使って確かめられる。

$$\Delta \Delta_\rho = \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \epsilon_0 + 3H(1 + \omega) \epsilon_0 = 0. \quad (1.2.69)$$

このゲージ不変密度ゆらぎを用いると式 (1.2.67) は、

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \Delta_\rho, \quad (1.2.70)$$

と、Poisson 方程式の形となる。従って  $\Psi$  は Newton ポテンシャルのようなものと理解できる。

### 1.2.3 スーパーホライズン保存量

次章から明らかになるが、この節で考えているゆらぎは、インフレーション中に作られるものだと想定している。インフレーションから現在までには理論的に未知な現象が多くあるので、素朴に考えるとインフレーションで作られたゆらぎから現在のゆらぎを計算することはできなさそうであるが、実はスーパーホライズンスケールでのとあるゆらぎの量は保存することが示される。この保存量が本項の主題である。

インフレーション中では共動ホライズンスケールは  $(aH)^{-1} \propto e^{-Ht}$  と指数関数的に小さくなる。従ってゆらぎは次々とホライズンから出て保存される。一方放射や物質優勢期では  $(aH)^{-1} \propto t^{1/2}, t^{2/3}$  と、共動ホライズンスケールは大きくなるので、保存されていたゆらぎがホライズンに入り、観測されるようになる、というわけである。

先に保存量の形を見てしまうと、Newton ゲージにおいて保存量は次のように表される。

$$\zeta_q = -\Psi_q + \frac{\delta \rho_q}{3(\bar{\rho} + \bar{P})}. \quad (1.2.71)$$

\*3 ゲージ変換の記号と混同しないように注意しよう。

ただし添字  $q$  は Fourier 変換の波数  $q$  成分を意味する。この保存量は曲率ゆらぎと呼ばれ、非常によく使われる。この節では、“どのようなエネルギー成分が優勢でも  $\zeta_q$  が保存量になるようなゆらぎの解が存在する”ことを示そう。この解を断熱解と呼ぶ。

$q = 0$  成分

まず  $q = 0$  として、完全一様等方なゆらぎのみを考えることにしよう。このとき気をつけなければいけないのは、完全一様等方なゆらぎしか存在しない時、Newton ゲージを課してもまだゲージ変換の自由度があるという点である。

Newton ゲージで、1 次の空間一様な計量摂動は、

$$h_{00} = -2\Phi(t), \quad h_{i0} = 0, \quad h_{ij} = -2\delta_{ij}a^2(t)\Psi(t) + a^2(t)D_{ij}(t). \quad (1.2.72)$$

ただし  $D_{ij}$  は拘束  $D_{ii} = 0$  がかかっている。これに対しまだゲージ自由度が残っているわけだが、そのゲージ変換は Newton ゲージの条件と空間一様の条件は崩してはならない。ゲージ変換 (1.2.53) より、 $h_{00}$  が空間一様であり続けるためには  $\epsilon_0$  は、

$$\epsilon_0(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t) + \chi(\mathbf{x}), \quad (1.2.73)$$

という形でなければならない。従って、

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\Delta E = \dot{\epsilon}. \quad (1.2.74)$$

また式 (1.2.52) より、 $h_{i0}$  がゼロであり続けるために  $\epsilon_i$  は、

$$\epsilon_i(\mathbf{x}, t) = a^2(t)f_i(\mathbf{x}) - a^2(t)\frac{\partial\chi(\mathbf{x})}{\partial x^i} \int \frac{dt}{a^2(t)}. \quad (1.2.75)$$

よって式 (1.2.51) から、

$$\Delta h_{ij} = -a^2 \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right) + 2\delta_{ij}a\dot{a}[\epsilon + \chi] - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\partial x^j} \int \frac{dt}{a}. \quad (1.2.76)$$

$h_{ij}$  に  $\mathbf{x}$  依存性が出ないように  $\chi$  は定数に選ばなければならない。そしてその場合  $\epsilon$  をシフトすることによって  $\chi = 0$  とできる。また同様に  $f_i$  は  $f_i(\mathbf{x}) = \omega_{ij}x^j$  という形でなければならない。ここで  $\omega_{ij}$  は定数行列である。 $\mathbf{x}$  に依存しない  $f_i$  の中の項は計量やその他に全く影響しないので無視した。以上より、

$$\Delta h_{ij} = -a^2[\omega_{ij} + \omega_{ji}] + 2\delta_{ij}a\dot{a}\epsilon. \quad (1.2.77)$$

一方、 $h_{ij}$  の分解 (1.2.28) と Newton ゲージ条件  $B = C_i = 0, A = -2\Psi$  から、

$$\Delta h_{ij} = -2a^2\delta_{ij}\Delta\Psi + a^2\Delta D_{ij}. \quad (1.2.78)$$

これらを比較して、

$$\begin{cases} \Delta\Psi = \frac{1}{2}\omega_{ii} - H\epsilon, \\ \Delta D_{ij} = -\omega_{ij} - \omega_{ji} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\omega_{kk}, \end{cases} \quad (1.2.79)$$

を得る。さて、 $\{h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}\}$  が運動方程式の解なら  $\{h_{\mu\nu} + \Delta h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu} + \Delta T_{\mu\nu}\}$  も解であり、従って  $\{\Delta h_{\mu\nu}, \Delta T_{\mu\nu}\}$  はいつでも解である。すなわちまずスカラーに対して以下の特別な解を得る。

$$\begin{aligned} \Psi &= H\epsilon - \frac{\omega_{ii}}{3}, & \Phi &= -\dot{\epsilon}, \\ \delta P &= -\dot{P}\epsilon, & \delta\rho &= -\dot{\rho}\epsilon, & \delta u &= \epsilon, & \pi^S &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.80)$$

より一般に、任意の 4 元スカラー  $s$  に対し、

$$\delta s = -\dot{s}\epsilon. \quad (1.2.81)$$

またテンソルについては、

$$D_{ij} \propto \omega_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\omega_{kk}, \quad \pi_{ij}^T = 0. \quad (1.2.82)$$

$q \neq 0$  成分へ

上で得られた解がきちんと  $q \neq 0$  成分の  $q \rightarrow 0$  極限解になっているかを考えよう。実はテンソル成分には特に問題がないのだが、スカラー成分については簡単ではなくて、 $q = 0$  において (すなわち  $\partial_i = 0$ ) 運動方程式 (1.2.63) は消失して情報を失ってしまっているのである\*4。従って  $q \neq 0$  の解が  $q = 0$  の解 ( $\pi^S = 0$  等) へと滑らかにつながるためには、 $\Phi = \Psi$  を手で課さなければならない。すなわち、

$$\dot{\epsilon} = -H\epsilon + \frac{\omega_{kk}}{3}. \quad (1.2.83)$$

ちなみに式 (1.2.64) も消失するが、手に入れるべき条件  $\delta u = \epsilon$  はすでに得られているので問題ない。以上より、

$$\zeta = \frac{\omega_{kk}}{3} = \text{const.} \quad (1.2.84)$$

---

\*4 もちろんこの運動方程式の消失が Newton ゲージを課した後もゲージ自由度が残っていることの原因であるが。

を得、確かに  $\zeta$  が保存していることがわかる。逆に  $\epsilon$  は、

$$\epsilon(t) = \frac{\zeta}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt', \quad (1.2.85)$$

と解けるので、

$$\begin{aligned} \Psi = \Phi &= \zeta \left[ -1 + \frac{H(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt' \right], \\ \frac{\delta P}{\dot{P}} = \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} &= -\delta u = -\frac{\zeta}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt', \end{aligned} \quad (1.2.86)$$

となる。ただし  $\mathcal{T}$  は任意である。より一般に、任意の 4 元スカラー  $s$  に対し、

$$\frac{\delta s}{\dot{s}} = -\frac{\zeta}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt'. \quad (1.2.87)$$

また  $\zeta = 0$  の時は別の定数  $\mathcal{C}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\mathcal{C}}{a(t)}, \\ \Psi = \Phi &= \frac{\mathcal{C}H(t)}{a(t)}, \\ \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} = \frac{\delta P}{\dot{P}} &= -\delta u = \frac{\delta s}{\dot{s}} = -\frac{\mathcal{C}}{a(t)}, \end{aligned} \quad (1.2.88)$$

である。

重要な点はこれらスカラー成分は宇宙の個々の要素  $\alpha$  に対し、同じ  $\delta\rho_\alpha/\dot{\rho}_\alpha$  を与えるという点である。そしてそれは各ゆらぎがエネルギーを保存するか否かに関係なく成り立っている。この理由のため、これらの解は断熱解と呼ばれる。

次章ではインフレーションで非零の  $\zeta$  が作られることを見る。スケール因子の時間依存性を、

$$a \propto t^m, \quad m = \frac{2}{3(1+\omega)} = \begin{cases} 1/2 & \text{放射優勢期} \\ 2/3 & \text{物質優勢期} \end{cases} \quad (1.2.89)$$

とおいてみれば、非零の  $\zeta$  に対する解 (1.2.86) は具体的に、

$$\Psi = \Phi = -\frac{3(1+\omega)}{5+3\omega} \zeta, \quad \frac{\delta s}{\dot{s}} = -\frac{3(1+\omega)}{5+3\omega} t\zeta, \quad (1.2.90)$$

と計算できる。また前項で導入したゲージ不変な密度ゆらぎ  $\Delta_\rho$  は、Poisson 方程式 (1.2.70) より、

$$\Delta_{\rho,k} = -\frac{k^2}{4\pi G a^2 \dot{\rho}} \Psi_k = \frac{k^2}{4\pi G a^2 \dot{\rho}} \frac{3(1+\omega)}{5+3\omega} \zeta_k = \frac{2(1+\omega)}{5+3\omega} \frac{k^2}{a^2 H^2} \zeta_k. \quad (1.2.91)$$



ただし途中で Friedmann 方程式  $3H^2 = 8\pi G\bar{\rho}$  を使った。以上より、特に物質優勢期であれば、

$$\Delta\rho = \frac{2}{5} \frac{k^2}{a^2 H^2} \zeta, \quad (1.2.92)$$

となり、インフレーションで曲率ゆらぎ  $\zeta$  が作られると、物質優勢期にこれだけのゲージ不変な密度ゆらぎが作られることになる。



## 第 2 章

# インフレーション

この章ではインフレーション [13–17] の基本的な物理を理解することを目標とする。インフレーションとは初期宇宙において宇宙が加速膨張している期間のことを指す。インフレーションは未だ理論的仮説にすぎないが、インフレーションが広く信じられている理由として、ビッグバンにおける 3 つの問題 [18–20] の解決と、ゆらぎの起源を与えることが挙げられるだろう。特に後者、宇宙に存在するあらゆるエネルギー密度ゆらぎの種がインフレーションから作られる機構は、CMB の温度ゆらぎや銀河団の大規模構造の観測から非常に高い精度でテストされており、宇宙論を数値的予言の行える強力な自然科学に昇華させた画期的な仕組みである。インフレーションによって作られる密度ゆらぎの種を計算することは、現代宇宙論の重要な課題の 1 つであり、本論文の主題でもある。

章の構成としては、まずインフレーションの定義とビッグバンにおける 3 つの問題、およびインフレーションによるその解決を見る。その後実際にインフレーションを起こす機構について述べ、最後にインフレーションによって作られる密度ゆらぎの種について詳しく述べていく。

### 2.1 加速膨張と 3 つの問題

この節では初期宇宙にインフレーションと呼ばれる加速膨張期が存在することで、ビッグバンにおける 3 つの問題が解決される様子を見る。ここではただインフレーションという期間が存在することを仮定するだけで、実際にインフレーションを起こせるかどうかについては以降の節で述べていく。

### 2.1.1 インフレーションの定義

インフレーションは初期宇宙の加速膨張期として定義される。スケール因子  $a(t)$  を用いれば、

$$\text{インフレーション} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0, \quad (2.1.1)$$

と書ける。この加速膨張を指して、インフレーションを急激な宇宙膨張と表現することも多い。

Hubble パラメータ  $H = \dot{a}/a$  を用いれば、同値な定義として、

$$\text{インフレーション} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0, \quad (2.1.2)$$

とも書ける。 $(aH)^{-1}$  は共動 Hubble 半径<sup>\*1</sup>であるので、この定義はインフレーション中に共動 Hubble 半径は減少することを示している。従って、インフレーション中は因果関係を持てる範囲がどんどん狭くなっていってしまう。これはインフレーションの重要な性質である。

さらにインフレーションの条件を書き換えると、

$$\text{インフレーション} \Leftrightarrow -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1. \quad (2.1.3)$$

これは Hubble 時間スケールでの Hubble パラメータの減少はゆっくりであることを表す。特にこれを強い不等式で置き換えた場合  $|\dot{H}| \ll H^2$ 、これをスローロール条件と呼び、これが満たされる時、Hubble パラメータはほぼ定数とみなすことができる。この時宇宙はほぼ指数関数膨張  $a \propto e^{Ht}$  をする。 $H$  が厳密に定数である時、宇宙は de Sitter 時空となる。

ここまでの定義は重力理論として何も仮定していない。ここで Einstein 重力を仮定するならば、加速度の方程式 (1.1.38) より、

$$\text{インフレーション} \Leftrightarrow \rho + 3P < 0, \quad (2.1.4)$$

エネルギー密度  $\rho$  は常に正を仮定するので、圧力  $P$  は負でなければならない。特にほぼ指数関数膨張を得るには  $P \simeq -\rho$  が必要である。後にスカラー場を用いてこれを実現する機構を述べよう。

<sup>\*1</sup> あるいは以降これに対応するスケールをホライズンと呼んでしまう。前章見たように、これは純 de Sitter 時空では厳密に事象ホライズンに一致する。

またビッグバン理論の成功につなげるために、インフレーションが終わった後、宇宙が高温になる再加熱機構も仮定する。再加熱以降は放射優勢期となり、その後の発展はビッグバン理論と同様である。

最後にインフレーションの持続時間を表す e-foldings(または e-folds) $N$  を定義しておこう。

$$e^N = \frac{a(t_f)}{a(t_i)}. \quad (2.1.5)$$

ただし  $t_f$  はインフレーションの終了時、 $t_i$  はインフレーションの開始時を表す。e-foldings は時間変数として使われることもしばしばある。例えば、ある時刻  $t$  と e-foldings を以下のように対応づける。

$$e^{N(t)} = \frac{a(t_f)}{a(t)}. \quad (2.1.6)$$

これは時刻  $t$  の事象が、インフレーション終了よりどれだけ前に起こったかを表す指標であり、特に  $N(t_f) = 0$  である。 $t$  と  $N$  の時間の流れが逆になっていることに気をつけよう。一方  $t$  と  $N$  の時間の流れを等しくし、

$$e^{N(t)} = \frac{a(t)}{a(t_i)}, \quad (2.1.7)$$

と対応づけることもある。これは、その微分形、

$$dN = H dt, \quad (2.1.8)$$

の形でよく使われ、例えば運動方程式中で時間変数を無次元量に取り替えたい時などに便利である。

### 2.1.2 平坦性問題

第 1 章で述べたように Planck 衛星の観測 [12] から宇宙は非常に高い精度で平坦 ( $\Omega_{K0} = 0$ ) であることがわかっている。条件を緩めても  $|\Omega_{K0}| < 1$  である。しかしこれはよく考えると不自然であることがわかる。なぜなら  $\Omega_K$  は放射、物質優勢期で増大するのである。 $\Omega_K$  は定義より、

$$\Omega_K = -\frac{K}{a^2 H^2} = -\frac{K}{\dot{a}^2}. \quad (2.1.9)$$

物質優勢期はおよそ  $z \sim 3000$  から現在  $z = 0$  まで続いているが、このとき  $a \propto t^{2/3}$  より  $\dot{a} \propto t^{-1/3} \propto a^{-1/2} \propto (1+z)^{-1/2}$  であり、従って  $\Omega_K \propto 1+z$  である。よって、現在値  $|\Omega_{K0}| < 1$  であるなら、物質優勢期の初め (放射と物質が同じオーダー存在する時

期なので等密度時 (equality) と呼ぶ) では  $|\Omega_K(z_{\text{eq}})| \lesssim 1/3000$  でなければならない。さらに遡って放射優勢期になれば、 $a \propto t^{1/2}$  より、 $\dot{a} \propto t^{-1/2} \propto a^{-1} \propto (1+z)^{-1}$  なので、 $\Omega_K \propto (1+z)^2$  となる。例えばニュートリノが熱平衡状態から脱結合 (decouple) したのが  $z \sim 10^{10}$  であるので、このころでは  $|\Omega_K(z_{\text{dec}})| \lesssim 10^{-17}$  と計算される。より初期にはさらに小さくしなければならない。従って  $|\Omega_{K0}| < 1$  であるには、宇宙初期に  $\Omega_K$  が非常に小さい値に調整されていなければならない。この不自然さを平坦性問題と呼ぶ。

もちろんこれは“矛盾”ではなく、あくまで“自然さ”の問題であるし、また  $K = 0$  となる必然性が存在しているのかもしれない。しかしインフレーションを導入すれば、これはとても自然に解決される。

さて、放射優勢期よりも前にインフレーションという加速膨張期があり、そのとき Hubble パラメータ  $H$  はほぼ定数であったと仮定しよう。このとき  $a \propto e^{Ht}$  であるから、

$$\Omega_K = \frac{K}{a^2 H^2} \propto a^{-2} \propto e^{-2Ht}, \quad (2.1.10)$$

と、曲率項は急激に減少することがわかる！ 従って、この時期が十分長く続き、曲率項が十分減少すれば、平坦性問題は自然に解決されるということである。

具体的にどの程度インフレーションが続けばよいのか定量的に見積もってみよう。自然な仮定として、初め曲率項は 1 のオーダーであるとする。

$$\left. \frac{|K|}{a^2 H^2} \right|_{t=t_i} \sim 1. \quad (2.1.11)$$

$t_i$  はインフレーション開始時刻である。このとき、e-foldings の定義より、インフレーション終了時刻  $t_f$  では、

$$\left. \frac{|K|}{a^2 H^2} \right|_{t=t_f} \sim e^{-2N}, \quad (2.1.12)$$

となる。よって現在  $|\Omega_{K0}| < 1$  となるには、

$$e^N > \frac{a_f H_f}{a_0 H_0}, \quad (2.1.13)$$

であればよい。ここでさらなる仮定としてインフレーション終了  $t_f$  と放射優勢期の開始  $t_1$  がごく短い時間で接続されたとする (瞬間再加熱という)。

$$a_f H_f \simeq a_1 H_1. \quad (2.1.14)$$

また、放射、物質優勢期の両方に使える便利な式、

$$H = \frac{H_{\text{eq}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^4}, \quad (2.1.15)$$

をここで導いておこう。ただし、 $t_{\text{eq}}$  は放射物質等密度時を表す。まず Friedmann 方程式より、

$$H = \sqrt{\frac{1}{3M_p^2}(\rho_M + \rho_R)}. \quad (2.1.16)$$

ただし放射と物質成分以外は無視した。放射密度と物質密度はそれぞれスケール因子の $-4$ 乗と $-3$ 乗に比例することから、

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{1}{3M_p^2} \left[ \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^3 \rho_{M\text{eq}} + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^4 \rho_{R\text{eq}} \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3M_p^2} \cdot 2\rho_{M\text{eq}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^4 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3M_p^2} \rho_{\text{eq}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^4 \right]}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$\rho_{M\text{eq}} = \rho_{R\text{eq}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{eq}}$  に気をつけよう。最後に  $H_{\text{eq}}^2 = \rho_{\text{eq}}/3M_p^2$  を使えば、式 (2.1.15) を得る。ちなみに  $a_{\text{eq}}$  は、

$$\frac{\Omega_{R0}}{\Omega_{M0}} = \frac{\Omega_{R\text{eq}}}{\Omega_{M\text{eq}}} \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} = \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \Leftrightarrow a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{R0}}{\Omega_{M0}} a_0, \quad (2.1.18)$$

であり、 $H_{\text{eq}}$  は、

$$\begin{aligned} H_{\text{eq}} &= \sqrt{\frac{1}{M_p^2} \cdot 2\rho_{M\text{eq}}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{M_p^2} \rho_{M0} \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}}\right)^3} \\ &= \sqrt{2\Omega_{M0}} H_0 \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}}\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

である。

これらより、 $a_1 \ll a_{\text{eq}}$  とすれば、

$$H_1 = \frac{H_{\text{eq}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_1}\right)^2. \quad (2.1.20)$$

よって、

$$\begin{aligned} e^N &> \frac{H_1}{a_0 H_0} a_{\text{eq}} \left(\frac{H_{\text{eq}}}{\sqrt{2} H_1}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{\Omega_{M0} a_{\text{eq}}}{a_0}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \left(\Omega_{R0} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_{c0}}\right)^{1/4}, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

となる。本論文では詳しく述べないが、CMB の温度が  $T_0 = 2.7255 \text{ K}$  [12] であることから、光子と零質量の3世代ニュートリノが放射成分に寄与していると仮定すると  $\Omega_{R0} = 4.15 \times 10^{-5} h^{-2}$  と計算できる。従って、 $\rho_{c0} = (3.0 \times 10^{-3} \text{ eV})^4 h^2$  を用いれば、

$$e^N > \frac{\rho_1^{1/4}}{0.037 h \text{ eV}}, \quad (2.1.22)$$

を得る。 $\rho_1$  はインフレーション模型を仮定しないとわからないが、ここでは典型的な値  $\rho_1 \sim (10^{16} \text{ GeV})^4$  を用いることにすれば、 $h = 0.6711$  より、

$$N > 61, \quad (2.1.23)$$

だけインフレーションが続けば、平坦性問題は解決されることがわかる。

### 2.1.3 地平線問題

次に地平線 (ホライズン) 問題を見ていこう。地平線問題とは、なぜ CMB の温度は非常に一様等方なのか、という問題である。

CMB の現在温度は  $T_0 = 2.7255 \text{ K}$  でほぼ一様等方であり、そのゆらぎは  $10^{-5}$  程度であることがわかっている [12]。さて、物質優勢期では  $H \propto a^{-3/2}$  より、最終散乱面  $z_L \simeq 1100$  でのホライズン半径は、

$$d_H \sim H_0^{-1} (1 + z_L)^{-3/2}. \quad (2.1.24)$$

一方、地球と最終散乱面の共動距離は  $\sim (a_0 H_0)^{-1}$  程度であるから、 $z_L$  時の物理的距離は、

$$d_A \sim H_0^{-1} (1 + z_L)^{-1}, \quad (2.1.25)$$

である\*2。したがって、地球から最終散乱面時のホライズンを見込む角は、

$$\theta_H = \frac{d_H}{d_A} \sim (1 + z_L)^{-1/2} \sim 1.6^\circ, \quad (2.1.26)$$

しかないことになる。すなわち、本来  $1.6^\circ$  程度の角度で見込める範囲しか相関がないはずなのに、現在の CMB は全天にわたって非常に高い精度で一様等方になっているのである。これを地平線 (ホライズン) 問題と呼ぶ。

\*2 添字  $A$  は角径距離 (angular diameter distance) を意味する。2点  $A, B$  を見込む角  $\theta$  は、2点から光が出た当時 (時刻  $t$ ) の  $A, B$  の物理的距離  $s$  を、当時の地球と2点の物理的距離  $d_A = r a(t)$  で割った  $s/d_A$  として、求められる。



この問題は、1つのパラメータを調整すれば解決できる平坦性問題よりはるかに難解である。1.6° 角しかないホライズン領域は全天におよそ、

$$\frac{4\pi}{\pi(1.6^\circ)^2} \sim 5 \times 10^3 \text{ 個}, \quad (2.1.27)$$

もの数存在する。地平線問題を“偶然”で解決するには、 $5 \times 10^3$  個のホライズン領域すべての CMB 温度を、 $10^{-5}$  の精度で“偶然”にそろえなければならない。一方、インフレーションを導入しさえすれば、この問題は実にスマートに解決される。

放射優勢期の前にインフレーションという加速膨張期が存在すると、粒子ホライズンは  $\sim H^{-1}$  から大きく変更される、というのが重要な点である。1.1.7 項で見たように、de Sitter 時空の粒子ホライズンは  $\propto e^{Ht}$  で増大する。従って、インフレーションが十分長い時間起これば、粒子ホライズンは指数関数的に広がり、全天を覆い尽くすことができるはずである。

定量的にインフレーションの持続時間を求めてみよう。式 (1.1.77) より、最終散乱面時  $t_L$  の粒子ホライズンは、

$$d_H(t_L) = a(t_L) \int_{t_i}^{t_L} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.1.28)$$

$t_i$  はインフレーション開始時である。インフレーション中はほぼ de Sitter 時空であるとして、

$$a(t) = a_f \exp(-H_f(t_f - t)), \quad (2.1.29)$$

であるとする。ただし、 $t_f$  はインフレーション終了時である。上の議論より、放射優勢期以降のホライズンの増加量はほとんど無視できるので、インフレーション期のみで粒子ホライズンが全天を覆うものとしよう。このとき、e-foldings  $N$  の定義より、

$$d_H(t_L) \simeq a(t_L) \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_f \exp(-H_f(t_f - t))} = \frac{a(t_L)}{a_f H_f} (e^N - 1), \quad (2.1.30)$$

を得る。地平線問題を解決するために  $e^N \gg 1$  を期待するので、最右辺の 1 は無視しよう。大角度で CMB が一様となるためには、 $d_H(t_L) > d_A(t_L) \sim a(t_L)/a_0 H_0$  が必要である。よって最終的に、

$$e^N > \frac{a_f H_f}{a_0 H_0}, \quad (2.1.31)$$

となる。これは、式 (2.1.13) と一致する。従って、地平線問題を解決するのに必要な e-foldings は平坦性問題を解決するのに必要な e-foldings と同程度であり、その典型的な値は  $N \gtrsim 61$  である。

## 2.1.4 モノポール問題

最後に挙げる問題は、モノポール問題と呼ばれるものである。素粒子の大統一理論によると、ある単連結ゲージ群  $G$  が  $M \sim 10^{16}$  GeV 程度のエネルギーで標準模型の  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  に自発的に破れるとされる。このように単連結ゲージ群が電磁理論の  $U(1)$  を含むゲージ群に自発的に破れると、電磁場のねじれた配位から磁気単極子 (モノポール) が生成されることが示されている。モノポール配位はあらゆる連続的過程で取り除くことができない安定な存在であるので、仮に宇宙がこの自発的対称性の破れを経験したのならば、モノポールが大量に生成されて、現在も残っているはずである。

粒子ホライズンに1個の割合でモノポールが生成されたとしよう。標準ビッグバン模型では放射優勢期 ( $G$  が破れるのはこの時期であろう) において、

$$d_H \sim \frac{1}{H} \sim t \sim \frac{M_p}{T^2}. \quad (2.1.32)$$

放射の温度  $T$  は  $T \propto a^{-1} \propto t^{-1/2}$  であることを思い出そう。従って、モノポールが生成された時  $T \sim M$  の数密度は、

$$d_H^{-1} \sim \left( \frac{M_p}{M^2} \right)^{-3} = \left( \frac{M}{M_p} \right)^3 M^3. \quad (2.1.33)$$

ここで  $M^3 = T^3$  は光子の数密度であるので、モノポールと光子の数密度比は  $M^3/M_p^3 \sim 10^{-9}$  となる。ここで BBN と観測との整合性より、バリオンと光子の数密度比は  $\eta \simeq 5 \times 10^{-9}$  とされる [2]。すなわち、バリオンとモノポールが同じオーダーだけ存在してしまうことになる。ところがモノポールはいまだ発見されていない。これがモノポール問題である。

インフレーションでの解決は単純である。モノポール生成前にインフレーションが起きれば粒子ホライズンが  $e^{Ht}$  で広がるので、数密度は小さくなるし、逆に生成後にインフレーションが起きれば、そのままモノポール数密度は加速膨張によって薄められる。現在、鉄鉱石や海水中のモノポール密度  $n_{\text{mon}}$  の制限は、

$$n_{\text{mon}} < 10^{-6} \text{ g}, \text{ または核子あたり } 10^{-30}, \text{ または光子あたり } 10^{-39}, \quad (2.1.34)$$

となっている [21]。従って上の議論より、モノポールを  $10^{30}$  倍薄めたいので、 $10^{10}$  の膨張があればよい。e-foldings で言えば、

$$e^N > 10^{10} \Leftrightarrow N > \log 10^{10} = 23, \quad (2.1.35)$$

となる。

## 2.2 スローロールインフレーション

### 2.2.1 スローロール近似

インフレーションを実際に起こすにはどのような機構を考えればよいただろうか。第1章で見たように宇宙に真空エネルギーが満ちていると、指数関数膨張が引き起こされる。それは例えば場が一様に満ちていて、それがポテンシャルエネルギーを稼いでいればそのような状況を再現できるだろう。Lorentz 対称性を破らないためにはそのような場はスカラー場がよい。十分長い時間インフレーションが継続するように、スカラー場はポテンシャルを“ゆっくり転がり落ちなければならない”。このように、スカラー場がポテンシャルをゆっくり転がることによって引き起こされるインフレーションをスローロールインフレーションと呼び、このスカラー場をインフラトンと呼ぶ。

まずインフラトン  $\phi$  の作用を与えよう。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (2.2.1)$$

FLRW 計量をおけば、

$$S = \int d^4x a^3(t) \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.2.2)$$

となる。ここから運動方程式は、

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left( \frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\delta S}{\delta \phi} \\ &= \ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi + V'(\phi). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Minkowski 時空との違いは、作用中の  $a^3(t)$  に時間微分があたることで  $3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = 3H \dot{\phi}$  項が出る点である。この項は  $\dot{\phi}$  に比例していて摩擦として働くので、一般に Hubble 摩擦と呼ばれる。Hubble 摩擦が強く効くとスローロールインフレーションが起こることになる。

スカラー場のエネルギー密度  $\rho$  と圧力  $P$  も与えておこう。エネルギー運動量テンソルは、

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi + g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.2.4)$$

であるので、式 (1.1.35) と比較して、

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2} (\partial_i \phi)^2 + V(\phi), \\ P &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2} (\partial_i \phi)^2 - V(\phi), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となる。

ここからは空間一様なインフラトン  $\phi(t)$  を考えることにして、空間微分項は落としてしまおう。あるいは、空間微分項は  $a^{-2}$  に比例するので、宇宙膨張で小さくなったと思ってもよい。このとき、運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.2.6)$$

であるし、エネルギー密度と圧力は、

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ P &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

である。従って、Friedmann 方程式より、

$$H = \sqrt{\frac{\rho}{3M_p^2}} = \sqrt{\frac{1}{M_p^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)}, \quad (2.2.8)$$

を得る。式 (2.2.6) と (2.2.8) を組み合わせると、 $\dot{H}$  について非常に便利な式を導くことができる。式 (2.2.8) の両辺を時間微分して、さらに式 (2.2.6) を使うと、

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_p^2}(\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'(\phi)\dot{\phi}) = -\frac{1}{M_p^2}H\dot{\phi}^2. \quad (2.2.9)$$

従って、

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_p^2}\dot{\phi}^2, \quad (2.2.10)$$

となる。

ほぼ指数関数的な膨張を得るには Hubble パラメータ  $H$  がほぼ定数でなければならない。従って、Hubble 時間  $1/H$  あたりの  $H$  の変化率  $|\frac{\dot{H}}{H} \frac{1}{H}|$  は 1 より十分小さい必要がある。つまり、

$$|\dot{H}| \ll H^2, \quad (2.2.11)$$

を要請しよう。式 (2.2.10) と (2.2.8) より、

$$\dot{\phi}^2 \ll |V(\phi)|, \quad (2.2.12)$$

でもある。このとき式 (2.2.7) より、たしかに  $\rho \simeq -P$  となっていて、真空エネルギーとして働いていることがわかる。条件 (2.2.12) をスローロール条件という。またこのとき Hubble パラメータは、

$$H \simeq \sqrt{\frac{V(\phi)}{3M_p^2}}, \quad (2.2.13)$$

である。

式 (2.2.13) が成り立っているとき、その時間微分についても近似がよいことを望むのは自然であろう。これは、式 (2.2.10) より、

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi), \quad (2.2.14)$$

であることがわかる。これはまさに、運動方程式 (2.2.6) 中で  $\ddot{\phi}$  を無視した形になっている。すなわち、

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|, \quad (2.2.15)$$

という条件を課したのと同じである。この条件もまた別のスローロール条件である。

これら2つの条件をより見やすいものにするために、スローロールパラメータというものを導入しよう。その1つ目を以下で定義する。

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2. \quad (2.2.16)$$

今まで出てきた式を使えば、

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \simeq \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{3H\dot{\phi}}{3M_p^2 H^2} \right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_p^2 H^2} = -\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1, \quad (2.2.17)$$

と変形できることがわかるだろう。従って、スローロール条件はスローロールパラメータ  $\epsilon$  を用い、

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.2.18)$$

と表すことができる。

もう1つのスローロールパラメータは、式 (2.2.14) を時間微分することで得られる。式 (2.2.14) の時間微分は、

$$\ddot{\phi} \simeq -\frac{\dot{H}}{H}\dot{\phi} - \frac{V''\dot{\phi}}{3H}. \quad (2.2.19)$$

これをスローロール条件 (2.2.15) に代入すれば、

$$\left| \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{V''}{3H^2} \right| \ll 1. \quad (2.2.20)$$

第1項は1つ目のスローロールパラメータ  $\epsilon$  であり、1より十分小さいはずだから除いて、

$$\eta = M_p^2 \frac{V''}{V} \ll 1, \quad (2.2.21)$$

という条件になる。この  $\eta$  が2つ目のスローロールパラメータである。

スローロールパラメータはポテンシャルの言葉で書かれているので、個々のインフレーションモデルへの見通しが良い。また、スローロールが破れ始めると、場はすばやく運動し出し、さらにスローロールの破れを加速するので、スローロールパラメータはスローロールの破れに非常に敏感である。そのため、スローロールパラメータが1のオーダーになる点はインフレーション終了の指標として大変便利である。

### 2.2.2 スローロールインフレーション模型

具体的にスローロールインフレーション模型を2つほど考察しよう。

1つ目はカオティックインフレーション [22] について述べよう。カオティックインフレーションではインフラトン場は1実スカラー場で、そのポテンシャルは  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 、または  $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4$  で与えられる。より一般にはポテンシャルが  $V(\phi) = \frac{\lambda\phi^n}{nM_p^{n-4}}$  の形で与えられる場合もカオティックインフレーションと呼ぶ。ここでは、質量項のみのカオティックインフレーション、 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  について考えよう。 $m$  はインフラトン  $\phi$  の質量である。

カオティックと呼ばれる所以は、このインフレーションの初期条件の取り方から来ている。宇宙が始まってから Planck 時間程度の時間しかたっていない時  $t \sim M_p^{-1}$ 、量子力学の不確定性関係  $\Delta E \Delta t \gtrsim 1$  より、インフラトン場は Planck エネルギー程度のエネルギー密度を持ち得る。

$$\rho \sim M_p^4. \quad (2.2.22)$$

式 (2.2.5) からスカラー場のエネルギー密度は、運動エネルギー  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$  と勾配エネルギー  $\frac{1}{2a^2}(\partial_i\phi)^2$  とポテンシャル項  $V(\phi)$  から成るが、これらそれぞれが Planck エネルギー程度であるのが自然であろう。

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &\sim M_p^4, \\ (\partial_i\phi)^2 &\sim M_p^4, \\ V(\phi) &\sim M_p^4. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

カオティックインフレーションではこれらを初期条件とする。このように特別な初期値を必要とせず、単に量子ゆらぎでランダムに配置された点から出発できるので、“カオティック”の名がついている。

ポテンシャルエネルギーに注目すれば、

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \sim M_p^4, \quad (2.2.24)$$

より、

$$\phi \sim \left( \frac{M_p}{m} \right) M_p \gg M_p. \quad (2.2.25)$$

ただし、インフラトンの質量  $m$  は Planck 質量  $M_p$  より十分小さいとしている。従って、インフレーション開始時、インフラトン場の値は Planck 質量  $M_p$  より遥かに大きいことになる。質量項ポテンシャル  $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  に対し、スローロールパラメータ  $\epsilon$  と  $\eta$  を計算すれば、式 (2.2.16) と (2.2.21) より、

$$\epsilon = \eta = \frac{2M_p^2}{\phi^2}, \quad (2.2.26)$$

を得る。従って確かに  $\phi \gg M_p$  であれば、 $\epsilon = \eta \ll 1$  となり、スローロールインフレーションが起こる。質量項カオティックインフレーションでは、 $\phi = \sqrt{2}M_p$  となると、 $\epsilon = \eta = 1$  となりインフレーションが終わる。

カオティックインフレーションのようにインフラトン場が Planck 質量より大きな値をとるインフレーションを大場 (large field) インフレーションと呼ぶ。現在我々が扱える場の理論は、重力効果が十分弱い場合のみであるので、Planck 質量を超えるような量がある理論はいささか疑問視される。これに対しインフラトン場が Planck 質量より小さな値のインフレーションを小場 (small field) インフレーションと呼ぶ。次に説明するハイブリッドインフレーションは、質量項ポテンシャルをさらに“底上げ”することによって、 $\phi \ll M_p$  でインフレーションを起こす、小場インフレーションの一例である。

ハイブリッドインフレーション [23, 24] のポテンシャル形は以下で与えられる。

$$V(\phi, \psi) = \Lambda^4 \left[ \left( 1 - \frac{\psi^2}{M^2} \right)^2 + \frac{\phi^2}{\mu^2} + 2 \frac{\phi^2 \psi^2}{\phi_c^2 M^2} \right]. \quad (2.2.27)$$

ポテンシャルを見てわかるように、ハイブリッドインフレーションではインフラトン場  $\phi$  の他にもう 1 つ、滝場と呼ばれるスカラー場  $\psi$  が導入される。 $\Lambda, \mu, M, \phi_c$  は模型パラメータである。見やすいように、ポテンシャルを次のように変形しよう。

$$V(\phi, \psi) = \Lambda^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\Lambda^4}{\mu^2} \right) \phi^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{4\Lambda^4}{M^2} \left( \frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 \right) \right] \psi^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{4\Lambda^4}{M^4} \right) \psi^4. \quad (2.2.28)$$

こうすると、インフラトン  $\phi$  の 2 乗質量は  $m_\phi^2 = 2\Lambda^4/\mu$ 、滝場  $\psi$  の 2 乗質量は  $m_\psi^2 = \frac{4\Lambda^4}{M^2} \left( \frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 \right)$  で与えられることがわかる。重要なのは、 $\phi_c < \phi$  で  $\psi$  の 2 乗質量は負になり、タキオニックになるという点である。 $\phi_c$  付近のポテンシャルを図 2.1 に示した。図



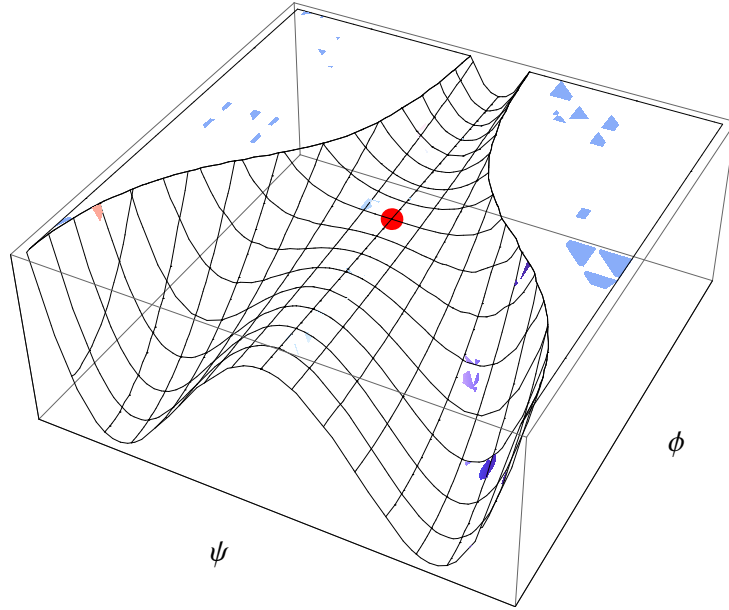


図 2.1. ハイブリッドインフレーションの  $\phi_c$  付近でのポテンシャル図。前後がインフラトン場  $\phi$  で、左右が滝場  $\psi$  である。赤い点が  $(\phi, \psi) = (\phi_c, 0)$  の臨界点で、これを境に滝場方向に不安定になっていることがわかる。奥方向から場が転がってきて、臨界点を過ぎると滝場方向に急激に場が転がり、スローロール条件を破ってインフレーションが終わる。

からわかるように、 $\phi > \phi_c$  では  $m_\psi^2 > 0$  であり、かつ  $\psi^4$  項もあるので、 $\psi$  方向のポテンシャルは強く立っている。従って、場はまず  $\psi = 0$  付近まですばやく転がり、そして、 $\phi$  方向に原点に向かってゆっくり転がる。そして  $\phi_c$  を過ぎると、 $m_\psi^2 < 0$  となることで  $\psi$  方向に不安定になり、左右どちらかに急激に転がってインフレーションが終わる。これがハイブリッドインフレーションのダイナミクスである。点  $(\phi, \psi) = (\phi_c, 0)$  は  $m_\psi^2$  の正負を分ける点であり、臨界点と呼ばれる。

特に  $\psi = 0$  では  $\phi$  のポテンシャルは質量項 + 底上げ  $V_0 = \Lambda^4$  の形である。ポテンシャルが底上げされているので、Hubble 摩擦が効きやすく、 $\phi \ll M_p$  でもインフレーションを起こすことができる。実際スローロールパラメータを計算してみると、 $V_0 = \Lambda^4 \gg \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\phi|_{\psi=0} &= \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2 \Big|_{\psi=0} = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{m_\phi^2 \phi}{\frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 + V_0} \right)^2 \\
 &\simeq M_p^2 \frac{m_\phi^2}{V_0} \frac{\frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2}{V_0} \ll M_p^2 \frac{m_\phi^2}{V_0}, \\
 \eta_{\phi\phi}|_{\psi=0} &= M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \Big|_{\psi=0} \simeq M_p^2 \frac{m_\phi^2}{V_0},
 \end{aligned} \tag{2.2.29}$$



となる。ただし、 $V_\phi = \partial V / \partial \phi$  等であり、 $\psi$  はゼロに固定されていると思って  $\phi$  方向だけを見ている。式 (2.2.29) より、 $V_0 \gg m_\phi^2 M_p^2$  であればスローロールインフレーションが起こることがわかる。 $m_\phi^2 \ll M_p^2$  としておけば、 $V_0 \ll M_p^4$  とすることもでき、小場インフレーションの理念も崩さない。 $\phi \ll M_p$  であっても、 $V_0 \gg m_\phi^2 M_p^2 \gg \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2$  と、上で課した条件を良くするのみである。

以上より、臨界点より上では小場スローロールインフレーションが起こることがわかる。臨界点以降の詳しいダイナミクスは本論文の主題であり、第 5 章で扱う。

### 2.2.3 再加熱

スローロール条件が破れた後、宇宙がどのような発展を行うかを考えよう。カオティックインフレーションを例にとれば、インフラトンの運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V' = -m^2\phi. \quad (2.2.30)$$

ここで、スローロールが破れて、スローロールパラメータ  $\epsilon = \eta^{*3}$  が 1 より十分大きくなっていたとする。

$$\eta = M_p^2 \frac{V''}{V} = \frac{m^2}{3H^2} \gg 1. \quad (2.2.31)$$

従って、今  $H \ll m$  であるので、Hubble 摩擦の項は無視できる。すなわち運動方程式は、

$$\ddot{\phi} = -m^2\phi. \quad (2.2.32)$$

これは調和振動子の方程式であり、その解は、

$$\phi = A \cos(mt + B), \quad (2.2.33)$$

のように与えられる。さて、ここに Hubble 摩擦を考慮して、この振動がどのように減衰するかを考えよう。運動方程式に  $\dot{\phi}$  をかければ、

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 + m^2\phi\dot{\phi} &= 0, \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) &= -3H\dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

左辺の被微分関数は、式 (2.2.7) よりインフラトン場のエネルギー密度  $\rho_\phi$  である。一方右辺であるが、今振動の時間スケール  $m^{-1}$  より宇宙膨張の時間スケール  $H^{-1}$  の方が十分大きいので、1 周期平均量を考えればよい。1 周期平均をブラケットで表すとすれば、

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \langle A^2 m^2 \sin^2(mt + B) \rangle = \frac{1}{2} A^2 m^2. \quad (2.2.35)$$

\*3 質量項カオティックインフレーションでは  $\epsilon = \eta$  だったことを思い出そう。

また、インフラトンエネルギー  $\rho_\phi$  は、

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}A^2m^2 \sin^2(mt + B) + \frac{1}{2}m^2A^2 \cos^2(mt + B) = \frac{1}{2}A^2m^2. \quad (2.2.36)$$

従って、右辺の1周期平均をとった運動方程式は、

$$\dot{\rho}_\phi = -3H\rho_\phi = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_\phi. \quad (2.2.37)$$

この解  $\rho_\phi \propto a^{-3}$  はまさに物質密度と同じスケール因子依存性である。すなわち、スローロールインフレーションが終わった後、インフラトン場は原点付近で振動し、これは物質のように振る舞うため、宇宙は Einstein-de Sitter 時空となる。

カオティックインフレーションでない場合も、ポテンシャルの零点付近では Taylor 展開の最低次、すなわち2次項が最も効くと考えられ、やはり振動するインフラトン場は物質のように振る舞うという近似がよい。

さて、このままインフラトンが減衰振動しているだけでは、宇宙には何も粒子がなくなってしまう。そこで、インフラトンは他の粒子と結合しており、最終的に標準模型粒子にまで崩壊するとする。このときインフラトンのエネルギーはすべて標準模型粒子に渡され、高温となった標準模型粒子は熱い宇宙を作り、ビッグバン模型に接続される。この機構を再加熱 (reheating) と呼ぶ。

ここでは簡単のため、インフラトンが直接標準模型粒子へ崩壊するとする。インフラトンの崩壊率を  $\Gamma_\phi$  とすれば、崩壊の時間スケール  $\Gamma_\phi^{-1}$  と宇宙膨張の時間スケール  $H^{-1}$  が同じ程度になった時に、実効的に崩壊が起こる。この瞬間すぐに宇宙は放射優勢宇宙になるとすれば、その温度  $T_R$  は、

$$\Gamma_\phi \simeq H = \left( \frac{\rho}{3M_p^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi^2 g_*}{30} T_R^4 \cdot \frac{1}{3M_p^2} \right)^{1/2}, \quad (2.2.38)$$

より、

$$T_R \simeq \left( \frac{\pi^2 g_*}{90} \right)^{-1/4} (\Gamma_\phi M_p)^{1/2}, \quad (2.2.39)$$

となる。この温度  $T_R$  を再加熱温度と呼ぶ。

以上より、インフレーション宇宙模型では、インフレーション期 → 物質優勢期 → 放射優勢期と標準ビッグバン模型に接続され、その後物質優勢期、真空エネルギー優勢期を経験することとなる。

## 2.2.4 e-foldings

時刻  $N$  での Hubble 半径が現在どの程度の大きさになっているかを考えよう。インフレーション終了時刻を  $t_f$ 、再加熱時刻  $t_R$ 、等密度時を  $t_{\text{eq}}$ 、現在を  $t_0$  とすれば、時間の流れは  $t_N < t_f < t_R < t_{\text{eq}} < t_0$  である。時刻  $t_N$  での Hubble 半径  $H^{-1}(t_N)$  が宇宙膨張によって現在  $L_N$  になっているとすると、

$$\begin{aligned} L_N &= \frac{a(t_0)}{a(t_N)} H^{-1}(t_N) \\ &= \frac{a(t_f)}{a(t_N)} \frac{a(t_R)}{a(t_f)} \frac{a(t_0)}{a(t_R)} H^{-1}(t_N), \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

という関係がある。インフレーション中の Hubble パラメータ  $H$  はほぼ定数だとして、 $H^{-1}(t_N) \simeq H_I^{-1}$  と置き換えることにする。

まず、 $a(t_f)/a(t_N)$  は e-foldings の定義より  $e^N$  である。

次に  $t_f \leq t \leq t_R$  は前項で見たように、インフラトンが振動する、物質優勢期であった。従って、インフラトンエネルギー  $\rho_\phi$  はスケール因子の  $-3$  乗に比例する。

$$\begin{aligned} \rho_\phi(t_R) &= \left( \frac{a(t_f)}{a(t_R)} \right)^3 \rho_\phi(t_f), \\ \Leftrightarrow \frac{a(t_R)}{a(t_f)} &= \left( \frac{\rho_\phi(t_f)}{\rho_\phi(t_R)} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

インフレーション終了時  $t_f$  のインフラトンエネルギーは  $\rho_\phi \simeq 3M_p^2 H_I^2$  で与えられるだろう。一方、再加熱時  $t_R$  のインフラトンエネルギーは再加熱温度  $T_R$  を使って、 $\rho_\phi(t_R) \simeq \frac{\pi^2}{30} g_* T_R^4$  である。よって、

$$\frac{a(t_R)}{a(t_f)} = \left( \frac{3M_p^2 H_I^2}{\frac{\pi^2}{30} g_* T_R^4} \right)^{1/3}, \quad (2.2.42)$$

となる。

最後に  $a(t_0)/a(t_R)$  は  $t_R$  以降のエントロピー保存を考えて求める。エントロピー保存則より、

$$\begin{aligned} s(T_R) a^3(t_R) &= s_0 a^3(t_0), \\ \Leftrightarrow \frac{a(t_0)}{a(t_R)} &= \left( \frac{s(T_R)}{s_0} \right)^{1/3} = \left( \frac{\frac{2\pi^2}{45} g_* T_R^3}{s_0} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

エントロピー密度の現在値  $s_0$  は光子とニュートリノがエントロピーを持っていると思えば、CMB 温度から計算でき、 $s_0 = 2.8 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  となる。

以上を合わせると、

$$\begin{aligned} L_N &= e^N \left( \frac{3M_p^2 H_I^2}{\frac{\pi^2}{30} g_* T_R^4} \right)^{1/3} \left( \frac{\frac{2\pi^2}{45} g_* T_R^3}{s_0} \right)^{1/3} \\ &= 4.3 \times 10^4 \text{ cm } e^N \left( \frac{H_I}{10^{10} \text{ GeV}} \right)^{-1/3} \left( \frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right)^{-1/3}. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

あるいは、

$$N = 52.6 + \ln \left( \frac{L_N}{1000 \text{ Mpc}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{H_I}{10^{10} \text{ GeV}} \right), \quad (2.2.45)$$

となる。現在の Hubble 半径は  $H_0^{-1} \simeq 4000 \text{ Mpc}$  であるので、時刻  $N \simeq 50 - 60$  程度の Hubble 半径に一致する。これは現在観測可能な範囲を表すので、これを観測可能宇宙 (observable universe) という。後述するが、インフレーション中では各時刻、ホライズンスケールのゆらぎが生成される。従って時刻  $N$  に作られるゆらぎは、波数  $k = (aL_N)^{-1}$  を持つ。

観測可能宇宙を包括できるほどスローロールインフレーションを持続できるか考えよう。ここでは、時刻  $t$  と e-foldings  $N$  の流れが逆向きの、

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_N)}, \quad (2.2.46)$$

で定義する。 $t_f$  はインフレーション終了時刻で、 $t_N$  は e-foldings  $N$  に対応する時刻である。このとき、

$$\frac{dN}{dt_N} = -\frac{\dot{a}(t_N)}{a(t_N)} = -H(t_N), \quad (2.2.47)$$

であるので、

$$N = \int_{t_N}^{t_f} H dt, \quad (2.2.48)$$

でもある。ここでスローロールインフレーションを仮定して、 $3H\dot{\phi} = -V'$  や  $3M_p^2 H^2 = V$  を用いれば、

$$N = \int_{t_f}^{t_N} (-H) dt = \int_{\phi_f}^{\phi_N} (-H) \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_{\phi_f}^{\phi_N} \frac{3H^2}{V'} = \int_{\phi_f}^{\phi_N} \frac{V}{V' M_p^2} d\phi, \quad (2.2.49)$$

と計算することができる。 $t_N$  としてインフレーション開始時刻  $t_i$  を代入すれば、全 e-foldings  $N_{\text{tot}}$  は、

$$N_{\text{tot}} = \int_{\phi_f}^{\phi_i} \frac{V}{V' M_p^2} d\phi. \quad (2.2.50)$$

スローロールを仮定すれば、e-foldings もポテンシャル形で表すことができた。

カオティックインフレーションの場合、 $\phi_f = \sqrt{2}M_p$  であったので、

$$N = \int_{\sqrt{2}M_p}^{\phi_i} \frac{\frac{1}{2}m^2\phi^2}{m^2\phi M_p^2} d\phi = \frac{1}{4M_p^2}(\phi_i^2 - 2M_p^2), \quad (2.2.51)$$

となる。カオティックインフレーションのスローロールパラメータ、

$$\epsilon = \eta = \frac{2M_p^2}{\phi^2}, \quad (2.2.52)$$

は、 $\phi$  が大きければ大きいほど 1 より十分小さく、スローロール条件がよい。従って  $\phi_i$  を十分大きくとれば、60 e-foldings 以上スローロールインフレーションを続けることができる。ハイブリッドインフレーションでも、 $\phi > \phi_c$  で  $\psi \simeq 0$  であれば簡単に計算できる。このときポテンシャル形は  $V = V_0 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 \simeq V_0$  であったので、インフレーションは臨界点  $\phi_c$  で終わるとすれば、

$$N \simeq \int_{\phi_c}^{\phi_i} \frac{V_0}{m_\phi^2\phi M_p^2} d\phi = \frac{V_0}{m_\phi^2 M_p^2} \log \frac{\phi_i}{\phi_c}, \quad (2.2.53)$$

となる。 $V_0 \gg m_\phi^2 M_p^2$  が必要であったので、 $\phi_i$  は  $\phi_c$  に近くても容易に 60 e-foldings 以上かせぐことができる。

## 2.3 インフレーションにおけるゆらぎの生成

前節まではインフラトン場を空間一様だと近似して、インフレーションのダイナミクスを計算した。ここからはインフレーションの重要な主題である、“ゆらぎの生成”を扱う。インフレーション中、インフラトン場の線形ゆらぎは重力との相互作用によって“凍結”されるということが起こる。これが前章で扱った曲率ゆらぎを生成し、宇宙のさまざまな構造の種となる。この節ではスーパーホライズンスケールのインフラトン場のゆらぎが凍結される様子を見よう。

### 2.3.1 線形ゆらぎ

この項ではほぼ指数関数膨張するインフレーション中での、インフラトン場の線形ゆらぎを見よう。時空のゆらぎは無視することとする。初めに便利な時間変数、共形時間  $\tau$  を以下で定義する。

$$ad\tau = dt, \quad \tau = \int^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.3.1)$$

de Sitter 時空  $a \propto e^{Ht}$  では、

$$\tau = -\frac{1}{aH}, \quad (2.3.2)$$

となる。ただし  $t = +\infty$  が  $\tau = 0$  となるよう積分定数を選んでいる。共形時間は常に負であることに注意しよう。この時間変数に対し平坦 FLRW 計量は、

$$ds^2 = a^2[-d\eta^2 + d\mathbf{x}^2],$$

$$g_{\mu\nu} = a^2 \times \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad g^{\mu\nu} = a^{-2} \times \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (2.3.3)$$

と、Minkowski 時空を単にスケール変換 (共形変換) した形になる。この時スカラー場の作用は、

$$S = \int d\tau d^3x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V \right],$$

$$= \int d\tau d^3x \left[ \frac{a^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{a^2}{2} (\nabla \phi)^2 - a^4 V \right] \quad (2.3.4)$$

となる。ここでプライムは共形時間  $\tau$  での微分である。以降ではインフラトン場の線形ゆらぎを見るために、ポテンシャル項は質量項  $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$  で近似し、高次項は落とす。スケール因子を吸収するために場を  $\varphi = a\phi$  と再定義しよう。このとき、

$$\phi' = \left( \frac{\varphi}{a} \right)' = \frac{\varphi'}{a} - \frac{a' \varphi}{a^2},$$

$$a^2 \phi'^2 = a^2 \left( \frac{\varphi'}{a} - \frac{a' \varphi}{a^2} \right)' = \varphi'^2 - 2 \frac{a'}{a} \varphi \varphi' + \frac{a'^2}{a^2} \varphi^2, \quad (2.3.5)$$

であり、部分積分、

$$-2 \frac{a'}{a} \varphi \varphi' \rightarrow \left( \frac{a'}{a} \right)' \varphi^2 = \left( \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \varphi^2, \quad (2.3.6)$$

を用いれば、作用は、

$$S = \int d\tau d^3x \left[ \frac{1}{2} \varphi'^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{a''}{a} - a^2 m^2 \right) \varphi^2 \right], \quad (2.3.7)$$

と書き直せる。これは単に Minkowski 時空中の、時間変化する 2 乗質量  $a^2 m^2 - a''/a$  を持ったスカラー場  $\varphi$  の作用である。従ってその運動方程式も簡単で、

$$\varphi'' - \nabla^2 \varphi + \left( a^2 m^2 - \frac{a''}{a} \right) \varphi = 0. \quad (2.3.8)$$

Fourier 空間に移行して、

$$\varphi''_{\mathbf{k}} + \left( k^2 - \frac{a''}{a} + a^2 m^2 \right) \varphi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.3.9)$$

de Sitter 時空近似では、

$$\varphi''_{\mathbf{k}} + \left[ k^2 - \left( 2 - \frac{m^2}{H^2} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] \varphi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.3.10)$$

ちなみにスローロールインフレーションでは、

$$\eta = M_p^2 \frac{V''}{V} = \frac{1}{3} \frac{m^2}{H^2} \ll 1, \quad (2.3.11)$$

であることに注意しよう。

次にスカラー場を量子化しよう。

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{x}, \tau) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\varphi_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} + \varphi_k^*(\tau) \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

モード関数  $\varphi_k$  ももとの運動方程式 (2.3.10) を満たす。

$$\varphi''_k + \left[ k^2 - \left( 2 - \frac{m^2}{H^2} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] \varphi_k = 0. \quad (2.3.13)$$

$\hat{\varphi}$  とその共役運動量  $\hat{\pi} = \hat{\varphi}'$  に正準交換関係、

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\pi}(\mathbf{y}, \tau)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{\varphi}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\varphi}(\mathbf{y}, \tau)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\pi}(\mathbf{y}, \tau)] = 0, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

を課して量子化するとする。生成消滅演算子の交換関係は、

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (2.3.15)$$

であるとする、正準交換関係 (2.3.14) に代入して、

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}, \tau), \hat{\pi}(\mathbf{y}, \tau)] = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (\varphi_k^* \varphi'_k - \varphi_k \varphi_k'^*) = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.3.16)$$

であるので、規格化条件、

$$\varphi_k^* \varphi'_k - \varphi_k \varphi_k'^* = -i, \quad (2.3.17)$$

を得る。後は初期条件を決めればモード関数の解が得られる。初期条件を決めるために十分過去  $k \gg -1/\tau = aH$  を考えよう。この時運動方程式は、

$$\varphi''_k + k^2 \varphi_k = 0, \quad (2.3.18)$$

である。これは Minkowski 時空上の零質量自由粒子の運動方程式そのものである。十分過去の条件  $k \gg -1/\tau = aH$  はすなわち十分サブホライズンの条件であり、この成分の

波長  $1/k$  はホライズンより非常に短いので時空の曲がりを感じないからである。初期条件を決めるにはさらにこのときの宇宙の状態を決めなければならない。そこで十分過去では宇宙は、以下で定義される真空であったと仮定する。

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad \text{for all } \mathbf{k}. \quad (2.3.19)$$

この真空は Bunch-Davies 真空と呼ばれる。粒子、または反粒子に正振動数モードと負振動数モードが混ざっていると、真空が Hamiltonian の固有状態にならないので、粒子としては正振動数か負振動数のどちらかを選ばなければならない。ここでは正振動数を粒子、負振動数を反粒子と選ぼう。規格化条件 (2.3.17) を考慮して、

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.3.20)$$

この初期条件で運動方程式 (2.3.13) の解は、

$$\varphi_k(\tau) = e^{i\frac{2\nu+1}{4}\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{-k\tau} H_\nu^{(1)}(-k\tau), \quad (2.3.21)$$

となる [3]。ただし  $H_\nu^{(1)}$  は第1種 Hankel 関数で、 $\nu$  は、

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}} \simeq \frac{3}{2} - \frac{m^2}{3H^2}, \quad (2.3.22)$$

である。従って、もとの場  $\phi_k$  の解は、

$$\phi_k = \frac{\varphi_k}{a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H\tau^{3/2} H_\nu^{(1)}(-k\tau). \quad (2.3.23)$$

ただし  $e^{i\frac{2\nu+1}{4}\pi}$  において  $\nu = 3/2$  としてしまった。de Sitter 近似において  $\tau = -(aH)^{-1}$  であることに注意しよう。

Hankel 関数は2つの Bessel 関数の和として表せる。

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x). \quad (2.3.24)$$

$J_\nu, Y_\nu$  はそれぞれ第1種、第2種 Bessel 関数である。Bessel 関数は  $x \rightarrow \infty$  で次の漸近形を持つ。

$$\begin{aligned} \sqrt{x}J_\nu(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\right), \\ \sqrt{x}Y_\nu(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.3.25)$$



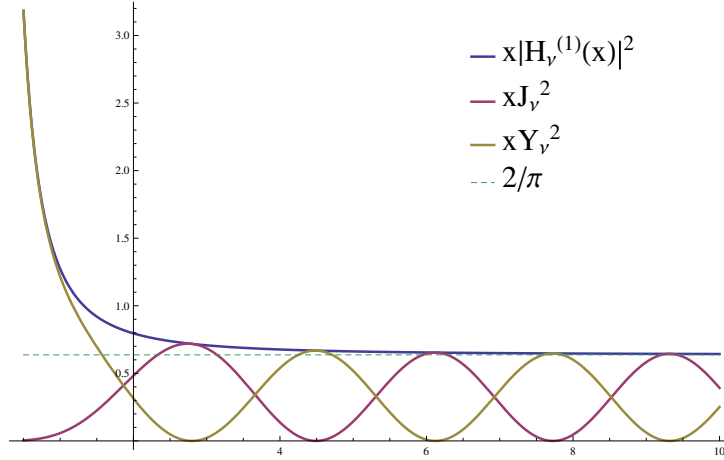


図 2.2. 繰り込まれた場  $\varphi_k(\tau)$  中の  $\sqrt{x}H_\nu^{(1)}(x)$  の 2 乗プロット。ただし  $\nu = 3/2$  としている。 $x|H_\nu^{(1)}(x)|^2$  はサブホライズン  $x = -k\tau > 1$  では定数  $2/\pi$  に漸近して、スーパーホライズン  $x = -k\tau < 1$  では発散している様子が見られる。またその実部  $xJ_\nu^2(x)$  と虚部  $xY_\nu^2(x)$  はサブホライズンでは振動しているが、スーパーホライズンでは振動をやめ、実部が減衰し、虚部が成長しているのも見て取れる。

つまり十分サブホライズン  $-k\tau = k/aH \gg 1$  で確かに、 $\varphi_k$  は自由粒子の平面波として、位相振動のみの形をしている。一方  $x \rightarrow 0$  では、Bessel 関数は次の形に漸近する。

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\simeq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \rightarrow 0, \\ Y_\nu(x) &\simeq -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

すなわち十分スーパーホライズン  $-k\tau = k/aH \ll 1$  になると Hankel 関数は位相振動をやめ、その虚部の大きさが非常に大きくなる。その様子は図 2.2 に示した。これは運動方程式 (2.3.13) 中で、実効 2 乗質量  $k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H^2}\right) \frac{1}{\tau^2}$  が負になることで、不安定性が生じるためである。もとの場  $\phi = \varphi/a$  は指数関数的に増大するスケール因子で  $\varphi$  を割っているので、 $\varphi$  の急激な成長と打ち消し合い、定数に漸近することになる。実際にゆらぎの相関を計算することでこれを見よう。

ゆらぎの 2 点相関関数の Fourier 変換をパワースペクトルと呼び、以下で定義される。

$$P_\varphi(k, t) = \int d^3x \langle \hat{\varphi}(0, t) \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.3.27)$$

量子期待値  $\langle \mathcal{O} \rangle$  は Bunch-Davies 真空に対して評価されている。あるいは上と同値な式として、

$$\langle \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{\varphi}_{\mathbf{k}'}(t) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_\varphi(k, t). \quad (2.3.28)$$

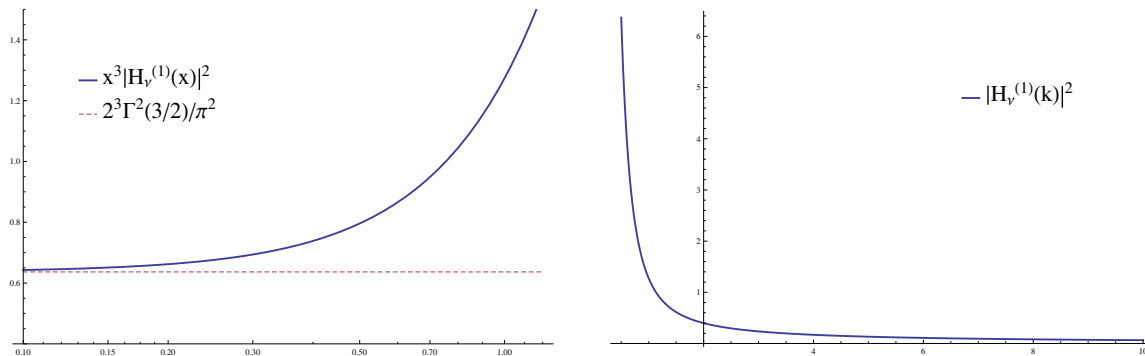


図 2.3. 左図は、もとの場の大きさ  $|\phi_k(\tau)|^2 = \frac{\pi}{4} \frac{H^2}{k^3} (-k\tau)^3 |H_\nu^{(1)}(-k\tau)|^2$  を時間  $\tau$  の関数と見て、 $x^3 |H_\nu^{(1)}(x)|^2$  をプロットした図。ただし  $\nu = 3/2$  である。スーパーホライズン  $x = k/aH < 1$  で定数  $2^3 \Gamma^2(3/2)/\pi^2$  に漸近している様子がわかる。右図では、 $|\phi_k(\tau)|^2$  を波数  $k$  の関数として (例えば数値的に  $\tau = 1$  の時刻をとって)、 $|H_\nu^{(1)}(k)|^2$  をプロットしている。サブホライズン  $x > 1$  成分はスーパーホライズン  $x < 1$  成分よりはるかに小さい。第 3 章ではスーパーホライズン成分に対してサブホライズン成分を微小な摂動とみなすが、その理由はここにある。

左辺に式 (2.3.12) を代入して、生成消滅演算子の交換関係 (2.3.15) を使えば、パワースペクトルはモード関数を用いて、

$$P_\varphi(k) = |\varphi_k|^2, \quad (2.3.29)$$

と簡単に表される。モード関数の解はすでに得られているのだから、パワースペクトルは、

$$P_\varphi(k) = \frac{\pi|\tau|}{4} |H_\nu^{(1)}(-k\tau)|^2 = \frac{\pi|\tau|}{4} [J_\nu^2(-k\tau) + Y_\nu^2(-k\tau)]. \quad (2.3.30)$$

Bessel 関数のスーパーホライズン漸近形 (2.3.26) を使えば、

$$P_\varphi(k) \simeq \frac{\pi|\tau|}{4} \frac{\Gamma^2(\nu)}{\pi^2} \left( -\frac{2}{k\tau} \right)^{2\nu}, \quad (2.3.31)$$

と  $-\tau \rightarrow 0$  で確かに発散する。もとの場  $\phi$  のパワースペクトルは、 $P_\varphi$  を  $a^2$  で割って、

$$P_\phi(k) \simeq \frac{H^2}{2k^3} = \text{const.} \quad (2.3.32)$$

ただし  $\nu \simeq 3/2$  とした。確かにゆらぎ  $\phi_k$  の相関はスーパーホライズンスケールで定数に漸近することがわかる。これをゆらぎの凍結と呼ぶ。凍結の様子を図示したものが図 2.3 である。また、式 (2.3.31) の  $\left(-\frac{2}{k\tau}\right)^{2\nu}$  で  $\nu = 3/2$  とせず  $\nu = 3/2 - m^2/3H^2$  とすることで、質量からの補正を取り入れることができ、

$$P_\phi(k) \simeq \frac{H^2}{2k^3} \left( \frac{k}{2aH} \right)^{\frac{2m^2}{3H^2}}, \quad (2.3.33)$$

となる。スーパーホライズン  $k/aH < 1$  では、質量の効果によってゆらぎが減衰し、パワースペクトルが小さくなることがわかる。

また以下で定義されるパワースペクトルもよく使われる。

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_\phi(k). \quad (2.3.34)$$

零質量近似では、

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (2.3.35)$$

となり、これはスケールに依存しない。ここから、インフレーションでは一般的にスケール不変なゆらぎが得られると言われる。

いずれにせよインフラトン場  $\phi$  のゆらぎはスーパーホライズンで凍結することがわかった。次節では凍結されたゆらぎを曲率ゆらぎ  $\zeta$  に変換する手法、 $\delta N$  形式について議論するが、その前にこの凍結という現象についてもう少し述べておこう。

### 2.3.2 ゆらぎの古典化

前項ではゆらぎの凍結について見た。ゆらぎの凍結は重力の効果によって、繰り込まれたインフラトン場  $\varphi_{\mathbf{k}}$  の実効的 2 乗質量がスーパーホライズンで負になり、その不安定性によってモード関数  $\varphi_k$  が急激に成長することによって起こるのであった。そしてこのときモード関数は位相振動をやめるのを見たが、これがゆらぎの“古典化”という重要な現象を引き起こす [33]。この古典化によって、スーパーホライズンのインフラトン場ゆらぎは量子場ではなく、統計的乱数として扱うことができるようになる。第 1 章での宇宙論的ゆらぎの議論はすべて古典的な扱いによって展開されたが、それがこの古典化によって保証されるのである。

最初に簡易的に古典化を議論しよう。繰り込まれたインフラトン場のモード関数  $\varphi_k$  の解は、

$$\varphi_k(\tau) = e^{i\frac{2\nu+1}{4}\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{-k\tau} H_\nu^{(1)}(-k\tau), \quad (2.3.36)$$

であったが、スーパーホライズンでの Bessel 関数の漸近形より、スーパーホライズンで、

$$\varphi_k(\tau) \rightarrow \frac{i\Gamma(\nu)}{2} \sqrt{\frac{-\tau}{\pi}} \left( \frac{2}{-k\tau} \right)^\nu, \quad (2.3.37)$$

とモード関数は純虚数になる。従ってインフラトン場演算子は、

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} = \varphi_k(\tau) [\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger], \quad (2.3.38)$$

と書ける。重要なのは生成演算子と消滅演算子の係数が等しいので、これは常に演算子  $\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$  に比例した演算子である。従って、一度  $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  の固有状態になると、その状態は以降ずっと  $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  の固有状態のままである。これを以て、 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  は何らかの固有値  $\varphi_{\mathbf{k}}$  に古典化したという。実際、式 (2.3.38) に対し、その共役運動量  $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$  は、

$$\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger = \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}'^\dagger = -\varphi_{\mathbf{k}}'^*(\tau)[\hat{a}_{-\mathbf{k}} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] \propto \hat{\varphi}_{-\mathbf{k}}, \quad (2.3.39)$$

と  $\hat{\varphi}_{-\mathbf{k}}$  に比例してしまうので、これらは交換する。

$$[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger] = 0. \quad (2.3.40)$$

この意味でもインフラトン場のゆらぎは古典化したと言える。

もちろんこれはあくまで簡易的な議論である。上で場が交換してしまったのは、Hankel 関数の中の実部  $J_\nu$  を無視したからであって、 $J_\nu$  を無視しなければ場の交換関係は、

$$[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = i(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.3.41)$$

のままである。定量的に見るためにモード関数の言葉に移行しよう。場の正準交換関係と同値なのはモード関数の規格化条件、

$$\varphi_{\mathbf{k}}^* \varphi_{\mathbf{k}}' - \varphi_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}'^* = 2i \text{Im} \varphi_{\mathbf{k}}^* \varphi_{\mathbf{k}}' = -i\hbar, \quad (2.3.42)$$

であった。ここで便宜的に  $\hbar$  を復活させた。古典極限を取るとは  $\hbar \rightarrow 0$  の極限をとることであるので、右辺が無視できるときに古典化していると言えるだろう。すなわち  $\hbar = 1$  の自然単位系では、以下で定義される  $F(k)$  に対し、

$$F(k) = \text{Re} \varphi_{\mathbf{k}}^* \varphi_{\mathbf{k}}', \quad (2.3.43)$$

$|F(k)| \gg 1$  を古典化の指標とできる。

さらなる理解のために、生成消滅演算子に着目しよう。前項では宇宙の初期条件として Bunch-Davies 真空、

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0, \quad (2.3.44)$$

を選んである。一方モード関数の急激な成長は明らかに粒子が生成されていることを示すが、なぜ真空から始めて粒子が生成されたのであろうか。 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  の対比として、平面波の係数として定義される次のような生成消滅演算子  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  を考えてみよう。

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2k}} (\hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-ik\tau} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{ik\tau}), \\ \hat{\pi}_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{k}{2}} (-i\hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-ik\tau} + i\hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{ik\tau}). \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

逆に解けば、

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} + i \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}} \right) e^{ik\tau}, \\ \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}^\dagger - i \frac{1}{\sqrt{k}} \hat{\pi}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) e^{-ik\tau}.\end{aligned}\quad (2.3.46)$$

場の交換関係 (2.3.41) に代入すれば、確かに生成消滅演算子の交換関係、

$$[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.3.47)$$

を満たす。 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  のモード関数は平面波から時間とともにずれて行くのであったから、 $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  は時間変化するという点に注意しよう。十分過去では、

$$\varphi_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}, \quad (2.3.48)$$

であったので、 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  と  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  は一致するが、時間とともにこれらは別の演算子となる。平面波の生成消滅演算子が時間変化するので、始めに  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  に対する真空を用意しても、これは  $\hat{b}_{\mathbf{k}}$  の言葉では次第に真空でなくなる。これが粒子生成の原因である。

$\hat{b}_{\mathbf{k}}$  の定義 (2.3.46) に  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  の定義 (2.3.12) を代入すれば、

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \varphi_{\mathbf{k}} + i \frac{\pi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{k}} \right) e^{ik\tau} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \varphi_{\mathbf{k}}^* + i \frac{\pi_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{k}} \right) e^{ik\tau} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ &= u_k e^{ik\tau} \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k e^{ik\tau} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \\ \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \varphi_{\mathbf{k}}^* - i \frac{\pi_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{k}} \right) e^{-ik\tau} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{k} \varphi_{\mathbf{k}} - i \frac{\pi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{k}} \right) e^{-ik\tau} \hat{a}_{\mathbf{k}} \\ &= u_k^* e^{-ik\tau} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + v_k^* e^{-ik\tau} \hat{a}_{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (2.3.49)$$

このように生成消滅演算子を変換することを Bogolubov 変換という。交換関係を保つという条件から (あるいは規格化条件 (2.3.17) でもよい)、

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1, \quad (2.3.50)$$

を満たす。従って、次のようにパラメータ付けしてみよう。

$$\begin{aligned}u_k(\tau) &= e^{-i\theta_k(\tau)} \cosh r_k(\tau), \\ v_k(\tau) &= e^{i(\theta_k(\tau) + 2\vartheta_k(\tau))} \sinh r_k(\tau).\end{aligned}\quad (2.3.51)$$

$\theta_k$  は位相、 $\vartheta_k$  はスクイズ角、 $r_k$  はスクイズパラメータと呼ばれる。モード関数を逆に解くと、

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{u_k + v_k^*}{\sqrt{2k}}, \quad |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2k} (\cosh 2r_k + \cos 2\vartheta_k \sinh 2r_k), \\ \pi_{\mathbf{k}} &= -i\sqrt{\frac{k}{2}} (u_k - v_k^*), \quad |\pi_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{k}{2} (\cosh 2r_k - \cos 2\vartheta_k \sinh 2r_k).\end{aligned}\quad (2.3.52)$$

また生成消滅演算子  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  は、

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\mathbf{k}} &= u_k^* e^{-ik\tau} \hat{b}_{\mathbf{k}} - v_k^* e^{ik\tau} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ &= \sqrt{\frac{k}{2}} (u_k^* - v_k) (\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} + i\gamma_k^{-1} \hat{\pi}_{\mathbf{k}}),\end{aligned}\quad (2.3.53)$$

ただし、

$$\begin{aligned}\gamma_k &= k \frac{u_k^* - v_k}{u_k^* + v_k} = k \frac{1 - i \sin 2\vartheta_k \sinh 2r_k}{\cosh 2r_k + \cos 2\vartheta_k \sinh 2r_k} = \frac{1}{2|\varphi_k|^2} - i \frac{F(k)}{|\varphi_k|^2}, \\ F(k) &= \text{Re} \varphi_k^* \varphi_k' = \text{Im} uv = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_k \sinh 2r_k.\end{aligned}\quad (2.3.54)$$

従って Bunch-Davies 真空の条件は、

$$(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}} + i\gamma_k^{-1} \hat{\pi}_{\mathbf{k}}) |0\rangle = 0, \quad (2.3.55)$$

となる。さらに Schrödinger 表示に移ろう (ただし今時間変数はあらわに書いていないので、Schrödinger 表示に移っても見た目は変わらないが)。Bunch-Davies 真空  $|0\rangle$  の波動汎関数  $\Psi$  に対し、 $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}$  は  $-\partial/\partial\varphi_{-\mathbf{k}}$  で置き換えられるので、その解は以下のようにガウス関数で与えられる<sup>\*4</sup>。

$$\begin{aligned}\Psi[\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{-\mathbf{k}}] &= \mathcal{N} \exp\left(-\frac{\varphi_{\mathbf{k}}\varphi_{-\mathbf{k}}}{2|\varphi_k|^2} (1 - i2F(k))\right) \\ &= \mathcal{N} \exp\left(-\frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{2|\varphi_k|^2} (1 - i2F(k))\right).\end{aligned}\quad (2.3.56)$$

$\mathcal{N}$  は規格化因子である。初期条件  $F(k) = 0$  では最小不確定状態であるが、 $F(k)$  が大きくなると波動汎関数は激しく振動し、不確定性が大きくなることがわかる。実際不確定性は、

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{\mathbf{k}}^2 \Delta\pi_{\mathbf{k}}^2 &= |\varphi_k|^2 |\pi_k|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 2\vartheta_k \sinh^2 2r_k + 1) = F^2(k) + \frac{1}{4},\end{aligned}\quad (2.3.57)$$

となる。対応する確率は、

$$P[\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{-\mathbf{k}}] \propto \exp\left(-\frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{|\varphi_k|^2}\right). \quad (2.3.58)$$

ガウス確率が得られたので、古典化をより厳密に議論できる。 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  と  $\hat{\pi}_{-\mathbf{k}}$  がほぼ交換するようになったとき、 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  はある確率分布  $\rho(\varphi_{\mathbf{k}}\varphi_{-\mathbf{k}}) = \rho(|\varphi_{\mathbf{k}}|)$  を持つ  $c$  数  $\varphi_{\mathbf{k}}$  に置き

<sup>\*4</sup> 変数がわかりにくくなってきたので気をつけよう。 $\varphi_k$  はモード関数、 $\varphi_{\mathbf{k}}$  は  $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  に対応する  $c$  数で、 $|\Psi[\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{-\mathbf{k}}]|^2$  は演算子  $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  が  $c$  数  $\varphi_{\mathbf{k}}$  を返す確率である。 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  が  $\varphi_{\mathbf{k}}$  を返すとき、 $\hat{\varphi}_{-\mathbf{k}}$  は  $\varphi_{-\mathbf{k}}$  を返す。

換えられる、ということを古典化と呼ぼう。 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  の任意の関数  $G(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}})$  に対し、置き換えは以下の意味である。

$$\langle G(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}})G^\dagger(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}) \rangle = \int d\varphi_{1,\mathbf{k}}d\varphi_{2,\mathbf{k}} \rho(|\varphi_{\mathbf{k}}|) |G(\varphi_{\mathbf{k}})|^2. \quad (2.3.59)$$

ただし 1, 2 の添字はそれぞれ実部と虚部を表す。これは実際  $\rho$  がガウス関数、

$$\rho(|\varphi_{\mathbf{k}}|) = \frac{1}{\pi|\varphi_{\mathbf{k}}|^2} \exp\left(-\frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}\right), \quad (2.3.60)$$

であるとき、例えば  $G$  を、

$$G(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \hat{\varphi}_{\mathbf{k}}^m, \quad (2.3.61)$$

などと Taylor 展開すれば、以下のように Wick の定理を展開して証明できる。

$$\begin{aligned} \langle G(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}})G^\dagger(\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}) \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_m q_n^* \varphi_{\mathbf{k}}^{m+n} \langle (\hat{a}_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger)^m (a_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{-\mathbf{k}})^n \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m! |q_m|^2 \varphi_{\mathbf{k}}^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_m q_n^* \int d\varphi_{1,\mathbf{k}}d\varphi_{2,\mathbf{k}} \rho(|\varphi_{\mathbf{k}}|) \varphi_{\mathbf{k}}^m \varphi_{\mathbf{k}}^{*n} \\ &= \int d\varphi_{1,\mathbf{k}}d\varphi_{2,\mathbf{k}} \rho(|\varphi_{\mathbf{k}}|) |G(\varphi_{\mathbf{k}})|^2. \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

古典化はガウス雑音  $e_{\mathbf{k}}$  を導入するとさらに簡潔に書き下せる。すなわち  $\langle e_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ ,  $e_{\mathbf{k}}^* = e_{-\mathbf{k}}$  を満たすガウス分布乱数  $e_{\mathbf{k}}$  にを用いて、 $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}$  を  $\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}$  という  $c$  数で置き換えれば、それが古典化である。

最後に Wigner 関数を使った古典化の理解について触れてこの項を終わろう。Wigner 関数は次のように定義される。

$$\begin{aligned} W(\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{-\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}}, \pi_{-\mathbf{k}}) \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx_1 dx_2 e^{-i(\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2)} \left\langle \varphi_{\mathbf{k}} - \frac{x_{\mathbf{k}}}{2} \left| \hat{\rho} \left| \varphi_{\mathbf{k}} + \frac{x_{\mathbf{k}}}{2} \right. \right. \right\rangle \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

$\hat{\rho}$  は密度演算子である。状態として Bunch-Davies 真空  $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$  を用いれば、

$$\begin{aligned} W(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx_1 dx_2 e^{-i(\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2)} \Psi^* \left( \varphi_{\mathbf{k}} - \frac{x_{\mathbf{k}}}{2} \right) \Psi \left( \varphi_{\mathbf{k}} + \frac{x_{\mathbf{k}}}{2} \right) \\ &= \mathcal{N}^2 \frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\pi} \exp\left(-\frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2}\right) \exp\left(-|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \left| \pi_{\mathbf{k}} - \frac{F(k)}{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2} \varphi_{\mathbf{k}} \right|^2\right). \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

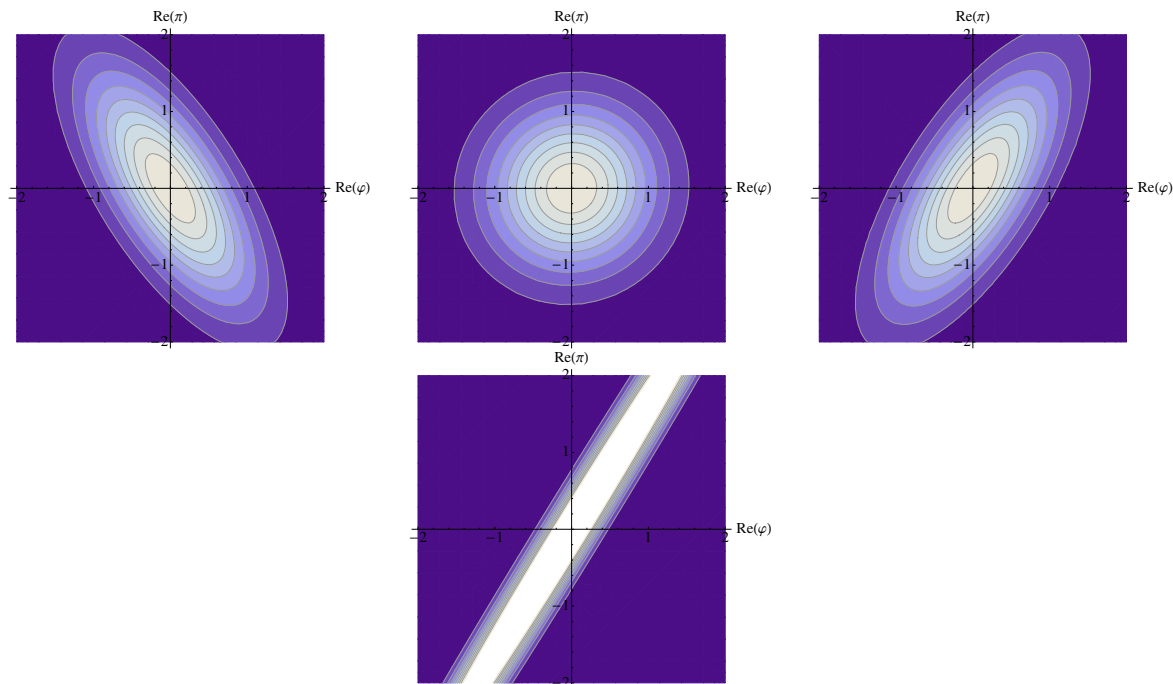


図 2.4.  $\varphi_{\mathbf{k}}, \pi_{\mathbf{k}}$  の実部に対する Wigner 関数のプロット例。Wigner 関数はサブホライズンでは上図のように振動するだけだが、スーパーホライズンになると下図のように  $2\vartheta_k$  の方向へスクイズし古典化する。

これは常に正なので相空間の確率分布としての解釈が正しい。古典化の指標は  $|F(k)| \gg 1$ 、あるいは  $|\varphi_k| \gg 1$  であったので、このとき、

$$W(\mathbf{k}, -\mathbf{k}) = P[\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{-\mathbf{k}}] \delta\left(\pi_{\mathbf{k}} - \frac{F(k)}{|\varphi_k|^2} \varphi_{\mathbf{k}}\right), \quad (2.3.65)$$

となり、まさに  $\pi_{\mathbf{k}} = \frac{F(k)}{|\varphi_k|^2} \varphi_{\mathbf{k}}$  にスクイズしている様子がよくわかる。 $F(k) = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_k \sinh 2r_k$  であったから、初め最小不確定状態だった宇宙が、相空間上で角度  $2\vartheta_k$  方向に  $\sinh 2r_k$  だけスクイズされているということだ (図 2.4 も参照)。

直感的には、モード関数の急激な成長とともに不確定性が大きくなるが、宇宙膨張は断熱変化なので相空間上で掃く面積は変わらず、ある方向に引き延ばされるにつれ相空間上の確率分布は直線  $\pi_{\mathbf{k}} = \frac{F(k)}{|\varphi_k|^2} \varphi_{\mathbf{k}}$  のように非常に細くなる。確率分布が直線になれば  $\varphi_{\mathbf{k}}$  と  $\pi_{\mathbf{k}}$  は同時に確定するので、これを古典化と呼ぶわけである。

## 2.4 $\delta N$ 形式

いよいよインフレーションで作られる曲率ゆらぎ、密度ゆらぎを実際に計算してみよう。ここでは  $\delta N$  形式という非常に簡潔かつ強力な手法を使って曲率ゆらぎを計算する。



まず、 $\delta N$  形式を定式化して、その後カオティックインフレーションを例に、具体的に曲率ゆらぎ、密度ゆらぎを計算する。

### 2.4.1 定式化

$\delta N$  形式では、曲率ゆらぎがスーパーホライズンスケールで保存することを別の観点から示す。ここでは、摂動展開ではなく勾配展開という手法をとることによって摂動の高次まで曲率ゆらぎの保存を示すことができる。同時に曲率ゆらぎが e-foldings のゆらぎ  $\delta N$  そのものであることが示され、従って曲率ゆらぎを計算するには、単に e-foldings のゆらぎを計算すればよいということになる。

準備としてまずは計量を  $(3+1)$ -分解する。

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (2.4.1)$$

証明は与えないが、任意の滑らかな計量がこの形に分解できる。 $\mathcal{N}$  はラプス関数、 $\beta^i$  はシフトベクトルと呼ばれる。 $\gamma_{ij}$  は空間 3 次元計量であるが、これの行列式をくくり出しておこう。

$$\gamma_{ij} = \tilde{a}^2(t, \mathbf{x}) \tilde{\gamma}_{ij}, \quad \det \tilde{\gamma}_{ij} = 1. \quad (2.4.2)$$

このとき  $\tilde{a}(t, \mathbf{x})$  は局所スケール因子である。さらにここから我々の宇宙のスケール因子  $a(t)$  をくくり出して、

$$\tilde{a}(t, \mathbf{x}) = a(t) \exp(\psi(t, \mathbf{x})), \quad (2.4.3)$$

としておく。 $\psi(t, \mathbf{x})$  は小さい摂動である。

次に、ここでは長波長のゆらぎ  $k \ll aH$  しかないものとする。このとき宇宙は局所的に一樣等方に見え、FLRW 時空となる。これを separate universe assumption という。FLRW 計量は、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.4.4)$$

であったのに対し、 $(3+1)$ -分解した計量 (2.4.1) は、

$$ds^2 = -(\mathcal{N}^2 - \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.4.5)$$

となり、 $dt dx^i$  項が合わない。従って少なくとも長波長近似  $k \ll aH$  で  $\beta^i$  は無視できるはずで、 $\epsilon = k/aH$  とすれば  $\beta^i = \mathcal{O}(\epsilon)$  である。以降、この  $\epsilon = k/aH$  について展開を行うが、これを勾配展開という。これはゆらぎが長波長だという近似しか使っておらず、ゆらぎそのものについて摂動展開しているわけではないので、ここでの議論はゆらぎの高次まで適用される。ちなみに空間添字は  $\gamma_{ij}$  を用いて上げ下げされる。

空間座標は宇宙にある流体と共に動くようにとるものとしよう。すなわち、

$$0 = v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau} = \frac{u^i}{u^0}. \quad (2.4.6)$$

$\tau$  は固有時である。4元速度  $u^\mu$  は  $u^\mu u_\mu = -1$  と規格化されているので、

$$u^\mu = \left[ \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^2 - \beta^i \beta_i}}, 0, 0, 0 \right] = \left[ \frac{1}{\mathcal{N}}, 0, 0, 0 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.4.7)$$

ここで膨張関数  $\theta$  を以下で定義しよう。

$$\begin{aligned} \theta = \nabla_\mu u^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} u^\mu) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N} e^{3\psi} a^3} \partial_\mu (\mathcal{N} e^{3\psi} a^3 u^\mu) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N} e^{3\psi} a^3} \partial_0 \left( \mathcal{N} e^{3\psi} a^3 \frac{1}{\mathcal{N}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\ &= \frac{3}{\mathcal{N}} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

これを用いて局所 Hubble パラメータ  $\tilde{H}$  は、

$$\tilde{H} = \frac{1}{3} \theta, \quad (2.4.9)$$

と定義される。

局所 Hubble パラメータと宇宙のエネルギー密度を関係づけるために、エネルギー保存則を考えよう。完全流体のエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (\rho + P) u_\mu u_\nu, \quad (2.4.10)$$

であり、保存則は  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  で与えられる。従って、

$$\begin{aligned} 0 &= u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} \\ &= u_\mu u^\mu u^\nu \nabla_\nu (\rho + P) + u_\mu (\rho + P) u^\nu \nabla_\nu u^\mu \\ &\quad + u_\mu u^\mu (\rho + P) \nabla_\nu u^\nu + g^{\mu\nu} u_\mu \nabla_\nu P \\ &= -u^\nu \nabla_\nu (\rho + P) + (\rho + P) u^\nu \nabla_\nu \left( \frac{1}{2} u_\mu u^\mu \right) \\ &\quad - (\rho + P) \theta + u^\nu \nabla_\nu P \\ &= -u^\nu \nabla_\nu \rho - (\rho + P) \theta. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$u^\nu \nabla_\nu \rho$  は、

$$u^\nu \nabla_\nu \rho = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\rho}{dx^\nu} = \frac{d\rho}{d\tau}, \quad (2.4.12)$$

であるので、

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -(\rho + P)\theta, \quad (2.4.13)$$

を得る。今空間座標は流体とともに流れているので、固有時は  $d\tau = \mathcal{N}dt$  である。よって、

$$\dot{\rho} = -(\rho + P)\mathcal{N}\theta = -3\left(\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi}\right)(\rho + P) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.4.14)$$

以上より、

$$\frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} = -\frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho + P} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.4.15)$$

を得る。これが一般化された連続の式である。

時刻  $t_i$  から  $t_f$  までの膨張の e-foldings を定義しよう。これは計量がゆらいでいるので空間に依存する。

$$\begin{aligned} N(t_f, t_i; \mathbf{x}) &= \frac{1}{3} \int_{t_i}^{t_f} \theta \mathcal{N} dt = -\frac{1}{3} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{\rho}}{\rho + P} dt = \int_{t_i}^{t_f} \left( \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\psi} \right) dt \\ &= \log \left[ \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right] + \psi(t_f, \mathbf{x}) - \psi(t_i, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

また全体の e-foldings  $N_0$  は、

$$N_0(t_f, t_i) = \log \left[ \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right], \quad (2.4.17)$$

である。従って、

$$\delta N(t_f, t_i; \mathbf{x}) = N(t_f, t_i; \mathbf{x}) - N_0(t_f, t_i) = \psi(t_f, \mathbf{x}) - \psi(t_i, \mathbf{x}), \quad (2.4.18)$$

となる。ここで  $t_i$  では等時刻面として、 $\psi(t_i) = 0$  となる平坦切断 (flat slice) を選び、 $t_f$  では  $\delta\rho = 0$  となる等密度切断 (uniform density slice) をとってみよう。このとき、

$$\delta N(t_f, t_i; \mathbf{x}) = \psi(t_f)|_{\delta\rho=0}, \quad (2.4.19)$$

であるが、この右辺の量を  $\zeta$  とおいてみる。

$$\zeta = \delta N(t_f, t_i; \mathbf{x}). \quad (2.4.20)$$

一方、仮に宇宙が断熱的であり、圧力がエネルギー密度のみの関数  $P = P(\rho)$  として書けたとする。このとき、全体の連続の式より、

$$N_0 = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\dot{a}}{a} dt = -\frac{1}{3} \int_{\bar{\rho}(t_i)}^{\bar{\rho}(t_f)} \frac{d\rho}{\rho + P}, \quad (2.4.21)$$

であるので、式 (2.4.18) は、

$$\psi(t_f, \mathbf{x}) - \psi(t_i, \mathbf{x}) = -\frac{1}{3} \int_{\rho(t_i, \mathbf{x})}^{\rho(t_f, \mathbf{x})} \frac{d\rho}{\rho + \bar{P}} + \frac{1}{3} \int_{\bar{\rho}(t_i)}^{\bar{\rho}(t_f)} \frac{d\rho}{\rho + \bar{P}}, \quad (2.4.22)$$

すなわち、

$$\psi(t_f, \mathbf{x}) - \psi(t_i, \mathbf{x}) = \left( -\frac{\delta\rho}{\bar{\rho} + \bar{P}} \Big|_{t_f} + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho} + \bar{P}} \Big|_{t_i} \right) \times \frac{1}{3}. \quad (2.4.23)$$

よって、次で定義される  $\zeta(\mathbf{x})$  は切断によらず一定である。

$$\zeta(\mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}) + \frac{\delta\rho}{3(\bar{\rho} + \bar{P})}. \quad (2.4.24)$$

これは  $t_i$  で平坦切断、 $t_f$  で等密度切断を選べば上で定義した  $\zeta$  と一致することに注意しよう。

Newton ゲージとの対応を見ておこう。Newton ゲージでは、

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2\delta_{ij}(1 - 2\Psi)dx^i dx^j, \quad (2.4.25)$$

であるのに対し、ここでの定式化では、

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + a^2 e^{2\psi} \tilde{\gamma}_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.4.26)$$

である。空間部分の計量は、ゆらぎが小さいとき零トレーステンソル  $\chi_{ij}$  を用いて、

$$a^2(t)[(1 + 2\psi)\delta_{ij} + 2\chi_{ij}], \quad (2.4.27)$$

と展開できるので、 $\psi \leftrightarrow -\Psi$  の対応がある。よって保存量  $\zeta(\mathbf{x})$  は Newton ゲージで、

$$\zeta = -\Psi + \frac{\delta\rho}{3(\bar{\rho} + \bar{P})}. \quad (2.4.28)$$

これは第1章で定義した曲率ゆらぎそのものである。

以上より、勾配展開の手法で、ゆらぎが小さくなくても長波長近似が良いときは、断熱的宇宙で曲率ゆらぎ  $\zeta$  が保存することが示された。そしてさらに重要なのは曲率ゆらぎ  $\zeta$  は  $t_i$  を平坦切断、 $t_f$  を等密度切断に選んだときの e-foldings のゆらぎそのものであるという点である。これを利用して曲率ゆらぎを求める方法を  $\delta N$  形式と呼ぶ。次項ではカオティックインフレーションを例に  $\delta N$  形式で具体的に曲率ゆらぎを計算してみよう。

## 2.4.2 インフレーションで作られる曲率ゆらぎ

インフレーションによって作られる曲率ゆらぎを、 $\delta N$  形式で求めてみよう。e-foldings を計算するための初期時刻  $t_i$  は平坦切断で、考えているゆらぎのスケールが Hubble スケールを超えて、凍結、古典化したあたりにとり、終了時刻  $t_R$  は等密度切断で、再加熱後にとろう。記号  $t_f$  はインフレーション終了時刻を表すためにとっておいた。e-foldings は、

$$N = \ln \frac{a(t_f, \mathbf{x})}{a(t_i, \mathbf{x})} + \ln \frac{a(t_R, \mathbf{x})}{a(t_f, \mathbf{x})}. \quad (2.4.29)$$

右辺第 2 項はインフラトン場のゆらぎによらないので、新たにゆらぎは作られないものとして無視しよう。第 1 項を  $N_{\text{inf}}(t_f, t_i; \mathbf{x})$  と名付ければ、式 (2.2.50) より、

$$N_{\text{inf}}(t_f, t_i; \mathbf{x}) = - \int_{\phi_i(\mathbf{x})}^{\phi_f} \frac{V}{V' M_p^2} d\phi. \quad (2.4.30)$$

インフレーション終了は場の値  $\phi_f$  で一意に決まるので、 $\phi_f$  は空間点に依存しないことに注意しよう。以上より、スローロール運動方程式  $3H\dot{\phi} = -V'$  を用いて、

$$\delta N(t_R, t_i; \mathbf{x}) = \frac{V}{V' M_p^2} \delta\phi = -H_I \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}}, \quad (2.4.31)$$

となる。ただし  $H_I$  はインフレーション中の Hubble パラメータである。注意すべきは、これはインフラトン場のゆらぎ  $\delta\phi$  についての線形近似に過ぎない点である。ゆらぎが大きい場合や、後述する非線形性パラメータ等を求めたい場合、Taylor 展開の高次項も含めて、

$$\delta N = \frac{\partial N}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} \delta\phi^2 + \dots, \quad (2.4.32)$$

などとする必要がある。ゆらぎの 1 次までしか取らないときは、Fourier 変換後も同じ関係が保たれ、

$$\delta N_k = -H_I \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \Big|_{k=aH_I}, \quad (2.4.33)$$

となる。ここでは波数  $\mathbf{k}$  のモードは  $k = aH_I$  で凍結して曲率ゆらぎに影響するとして、右辺を  $k = aH_I$  となる時刻で評価している。またゲージ不変密度ゆらぎ  $\Delta_\rho$  は式 (1.2.92) より、特に物質優勢期で、

$$\Delta_\rho = -\frac{2}{5} \frac{k^2}{a^2 H^2} H_I \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \Big|_{k=aH_I}, \quad (2.4.34)$$

である。

それぞれのパワースペクトルも求めよう。密度ゆらぎのパワースペクトルは、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{\Delta\rho}(k) &= \frac{4}{25} \left( \frac{k^2}{a^2 H^2} \right)^2 \frac{H_I^2}{\dot{\phi}^2} \mathcal{P}_\phi(k) \\
 &= \frac{4}{25} \left( \frac{k^2}{a^2 H^2} \right)^2 H_I^2 \left( \frac{3H_I}{V'} \right)^2 \left( \frac{H_I}{2\pi} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{25\pi^2} \left( \frac{k^2}{a^2 H^2} \right)^2 \frac{V^3}{3V'^2 M_p^2} \\
 &= \frac{1}{150\pi^2 M_p^4} \left( \frac{k^2}{a^2 H^2} \right)^2 \frac{V}{\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

ただし右辺は  $k = aH_I$  の時刻で評価し、 $\epsilon$  はスローロールパラメータ、

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \tag{2.4.36}$$

である。また曲率ゆらぎのパワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{H_I^2}{\dot{\phi}^2} \mathcal{P}_\phi(k) = \frac{1}{24\pi^2 M_p^2} \frac{V}{\epsilon} \Big|_{k=aH_I}. \tag{2.4.37}$$

Planck 衛星の観測 [12] から、 $a(t_0) = 1$  の規格化で  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  のスケールの曲率ゆらぎは、 $\mathcal{P}_\zeta(k_*) = 2.215 \times 10^{-9}$  である。

スペクトラルインデックス  $n_s$  というのも重要なパラメータである。曲率ゆらぎ  $\mathcal{P}_\zeta(k)$  が波数のべきで動くとは仮定したとき、そのべきをスペクトラルインデックス  $n_s$  と呼ぶ。

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \propto k^{n_s-1}. \tag{2.4.38}$$

逆に解けば、

$$n_s = 1 + \frac{d \ln \mathcal{P}_\zeta}{d \ln k}. \tag{2.4.39}$$

定義より、 $n_s = 1$  ならば曲率ゆらぎはスケール  $k$  によらない、一様スペクトルである。パワースペクトルはすでに求まっているので、スペクトラルインデックスも具体的に求めてみよう。

$$n_s - 1 = \frac{d \ln(V^3/V'^2)}{d \ln k}, \tag{2.4.40}$$

であるが、ここで  $V$  の  $k$  依存性は、 $V(\phi)|_{k=aH_I}$  を通して与えられる。インフレーション中は  $aH_I \propto e^{-N}$  より、

$$d \ln k = -dN = -\frac{V}{V' M_p^2} d\phi. \tag{2.4.41}$$

従って、

$$\begin{aligned} n_s - 1 &= \frac{d \ln(V^3/V'^2)}{-\frac{V}{V' M_p^2} d\phi} \\ &= -\frac{V'}{V} M_p^2 \left[ 3 \frac{V'}{V} - 2 \frac{V''}{V'} \right] = -3 \left( \frac{V'}{V} \right)^2 M_p^2 + 2 \frac{V''}{V} M_p^2. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

2つのスローロールパラメータが、

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta = M_p^2 \frac{V''}{V}, \quad (2.4.43)$$

であったことを思い出せば、

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\eta. \quad (2.4.44)$$

スローロールパラメータは1より十分小さいので、曲率ゆらぎはほぼスケール不変なスペクトルを与えることがわかる。Planck 衛星の観測 [12] によれば、 $n_s = 0.9616 \pm 0.0094$  (68%),  $k_* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$  である。

カオティックインフレーションの場合、曲率ゆらぎがどうなるかをみよう。ポテンシャルは質量項のみ  $V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$  だとすれば、模型パラメータはインフラトン質量  $m$  だけである。曲率ゆらぎは、

$$\mathcal{P}_\zeta(k_*) = \frac{1}{24\pi^2 M_p^4} \frac{V}{\epsilon} = \frac{m^2 \phi_*^4}{96\pi^2 M_p^6}. \quad (2.4.45)$$

観測しているスケールは  $L_N = k_*^{-1} = 20 \text{ Mpc}$  であり、e-foldings との対応は、

$$N = 52.6 + \ln \left( \frac{L_N}{1000 \text{ Mpc}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{T_R}{10^{10} \text{ GeV}} \right) + \frac{1}{3} \ln \left( \frac{H_I}{10^{10} \text{ GeV}} \right), \quad (2.4.46)$$

であったから、 $N_* \simeq 50$  である。一方、カオティックインフレーションにおいて式 (2.2.51) より、

$$N_* = \frac{1}{4M_p^2} (\phi_*^2 - 2M_p^2), \quad (2.4.47)$$

だったので、 $\phi_* \simeq 2M_p \sqrt{N_*} \simeq 14M_p$  となる。従って、

$$\mathcal{P}_\zeta(k_*) = \frac{14^4}{96\pi^2} \frac{m^2}{M_p^2}. \quad (2.4.48)$$

これが観測値  $\mathcal{P}_\zeta(k_*) = 2.215 \times 10^{-9}$  と合うためには、インフラトン質量は、

$$m = \sqrt{\frac{96\pi^2}{14^4} \times 2.215 \times 10^{-9} M_p^2} \simeq 1.8 \times 10^{13} \text{ GeV}, \quad (2.4.49)$$

となる。またスローロールパラメータは、

$$\epsilon = \eta = \frac{2M_p^2}{\phi^2}, \quad (2.4.50)$$

であったので、スペクトラルインデックス  $n_s$  は、

$$n_s(k_*) = 1 - \frac{8M_p^2}{\phi_*^2} = 0.96, \quad (2.4.51)$$

と観測と無矛盾である。

ハイブリッドインフレーションの場合はどうだろうか。ここでも  $\phi > \phi_c$  で  $\psi \simeq 0$  であるとすれば、 $V = V_0 + \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 \simeq V_0$  より、

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \simeq \frac{M_p^2}{2} \frac{m_\phi^4 \phi^2}{V_0^2}. \quad (2.4.52)$$

従って曲率ゆらぎのパワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{1}{24\pi^2 M_p^4} \frac{V}{\epsilon} \simeq \frac{1}{12\pi^2 M_p^6} \frac{V_0^3}{m_\phi^4 \phi_k^2}. \quad (2.4.53)$$

ただし  $\phi_k$  は  $\phi$  の Fourier 変換ではなく、 $k = aH_I$  となる時刻での  $\phi$  の値である。 $V_0$  は  $V_0 \gg m_\phi^2 M_p^2, m_\phi^2 \phi^2$  であったが、十分  $V_0 \ll M_p^4$  であれば、 $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-9}$  とすることは可能である。一方致命的な問題となってくるのがスペクトラルインデックスである。ハイブリッドインフレーションのスローロールパラメータは式 (2.2.29) より  $\epsilon \ll \eta$  であった。従ってスペクトラルインデックスは、

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta \simeq 1 + 2\eta > 1, \quad (2.4.54)$$

と1を超えてしまうのである。これは Planck 衛星の観測から強く棄却されている。ハイブリッドインフレーションを救う手だてとして  $\phi < \phi_c$  でスローロールインフレーションを起こしたりする方法等が考えられているが [31, 32]、本論文ではこれらについては深く立ち入らず、純粋に臨界点前後で作られる曲率ゆらぎに焦点を絞ることにする。



## 第3章

# ストカスティック形式

前章では、インフレーション中において、インフラトンほぼ空間一様な古典場であるとみなし、小さな摂動として量子ゆらぎを入れた。つまりインフレーションのダイナミクスは空間一様な背景インフラトン場と重力場との古典的相互作用のみを考慮して計算され、その背景の下で線形量子論を展開した。もちろんゆらぎが十分小さければこれは良い近似であろう。しかし、インフレーション中常にゆらぎが小さいという保証はないし、もしゆらぎの非線形効果が大きいなら、以下の2点について慎重に考える必要がある。

- 量子ゆらぎの背景場への反跳を考えると、インフレーションのダイナミクス自体が変わってくるのではないか。
- また、計算されるゆらぎの性質も大きく変わるのではないか。

もちろん我々は量子重力理論を知らないので重力背景で完全な量子論を展開することはできない。しかし前章で見たように膨張する時空中ではスーパーホライズンな量子ゆらぎが古典化する機構が存在する。従ってこれを上手く使うことで量子ゆらぎを古典的に扱う手法が作れそうである。そしてこれを実際に実現したのがストカスティック形式 [39–48] である。

ストカスティック形式では空間一様なゼロモードではなく、スーパーホライズンモードを足しあげた場を古典化された背景場とする。このとき以下に示すように、背景場の運動方程式に白色雑音に比例した揺動項が入る。これがまさに古典化した量子ゆらぎである。

この章では、まず2通りの方法で揺動項を導出し、それから揺動の与える影響について調べていこう。

### 3.1 Langevin 方程式 I ~ 運動方程式からの導出

この節ではスカラー場の運動方程式から簡略的に揺動項を導こう [49, 50]。簡略的とは言っても、物理的な本質は十分理解できるはずである。

まずストカスティック形式ではすべてのスーパーホライズンモードを背景場とするので、スカラーインフラトン  $\phi(t, \mathbf{x})$  を以下のように2つに分ける\*1。

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \phi_{\text{IR}}(t, \mathbf{x}) + \hat{\phi}_{\text{UV}}(t, \mathbf{x}), \quad (3.1.1)$$

$$\phi_{\text{IR}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t) (1 - \theta(k - \epsilon a(t)H(t))), \quad (3.1.2)$$

$$\hat{\phi}_{\text{UV}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \theta(k - \epsilon a(t)H(t)). \quad (3.1.3)$$

ここで  $\phi_{\mathbf{k}}(t)$  は  $\phi(t, \mathbf{x})$  の Fourier 変換であり、 $\theta$  は Heviside 階段関数、

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

である\*2。  $a$ 、 $H$  はそれぞれスケール因子、Hubble パラメータであり、従って  $aH$  は共動座標でのホライズンスケールである。正定数  $\epsilon > 0$  を 1 より十分小さくとすることで、IR モードはホライズンスケールより波数が小さい、すなわち波長が大きい、スーパーホライズンモードのみを積分し、UV モードはそれ以外となっている。ハットは演算子であることを表し、スーパーホライズンモードである IR 場は古典化して  $c$  数になっていると仮定する。ここでもインフレーション中の宇宙の状態は、Bunch-Davies 真空  $|0\rangle$ 、

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \text{for all } \mathbf{k} \quad (3.1.5)$$

としよう。第2章で出てきた平面波の係数としての生成消滅演算子  $b_{\mathbf{k}}$  については、スーパーホライズンモード  $k < \epsilon aH$  に対して Bunch-Davies 真空  $|0\rangle$  は  $b_{\mathbf{k}}$  の真空ではない  $b_{\mathbf{k}}|0\rangle \neq 0$  ことが、IR 場が古典化しているための必要条件である。一方サブホライズン

\*1 ここでは IR のゆらぎは十分小さく、時空は平坦な FLRW 時空でよく近似できると仮定している。そのためスケール因子や Hubble パラメータは時間のみの関数になっており、IR 場と UV 場が well-defined になる。しかし一般には IR のゆらぎは大きくてもよいし、ストカスティック形式で取り扱いたいのはむしろそのような場合である。このときでも Bunch-Davies 真空の仮定からサブホライズンなゆらぎは小さく、したがって各ホライズン程度の大きさの領域 (パッチ) はそれぞれ独立な FLRW 時空で進化するとよい (これを separate universe assumption という)。これにより IR、UV は各パッチのスケール因子と Hubble パラメータを使ってパッチごとに定義すれば、それなりによく定義できる。

\*2 この節では簡単のために IR と UV を階段関数で分けたが、より一般の窓関数  $W(k/\epsilon aH)$  を使うことも考えられる。階段関数は滑らかでないので、あくまでなんらかの滑らかな窓関数  $W(k/\epsilon aH)$  の極限として理解されるべきだろうが、極限としてのふるまいも正しいかどうかは未だ議論されている [51, 52]。

$k > \epsilon aH$  に対しては  $b_{\mathbf{k}} \simeq a_{\mathbf{k}}$  がよくて、演算子  $b_{\mathbf{k}}$  に対しても Bunch-Davies 真空は真空であるとする。つまり UV 場は真空ゆらぎであるということである。以降は簡略化のためハットは落とすこととし、Hubble パラメータは定数であるとする。

さて、スカラー場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0, \quad (3.1.6)$$

であるが、後の簡便のためにこれを Hamiltonian 形式に書き換えておこう。

$$\begin{cases} \pi = \dot{\phi}, \\ \dot{\pi} + 3H\pi - a^{-2}\nabla^2\phi + V'(\phi) = 0. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

さらに共役運動量  $\pi$  も IR と UV モードに分けておく。

$$\pi_{\text{IR}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{k}}(t)(1 - \theta(k - \epsilon aH)), \quad (3.1.8)$$

$$\pi_{\text{UV}}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{k}}(t)\theta(k - \epsilon aH). \quad (3.1.9)$$

ここで  $\theta(k - \epsilon aH)$  の時間依存性のために  $\dot{\phi}_{\text{IR}} \neq \pi_{\text{IR}}$  であることに注意しよう。これら IR と UV の定義を用いて運動方程式 (3.1.7) を書きなおせば、

$$\begin{cases} \pi_{\text{IR}} + \pi_{\text{UV}} = \dot{\phi}_{\text{IR}} + \dot{\phi}_{\text{UV}}, \\ \dot{\pi}_{\text{IR}} + 3H\pi_{\text{IR}} - a^{-2}\nabla^2\phi_{\text{IR}} + \dot{\pi}_{\text{UV}} + 3H\pi_{\text{UV}} - a^{-2}\nabla^2\phi_{\text{UV}} + V'(\phi) = 0. \end{cases} \quad (3.1.10)$$

ポテンシャル  $V(\phi) = V(\phi_{\text{IR}} + \phi_{\text{UV}})$  は  $\phi_{\text{UV}}$  について展開して、

$$V'(\phi) \simeq V'(\phi_{\text{IR}}) + V''(\phi_{\text{IR}})\phi_{\text{UV}}, \quad (3.1.11)$$

としておこう。これは UV 場が量子ゆらぎであり、古典的背景場である IR 場より十分小さい ( $\phi_{\text{UV}} \ll \phi_{\text{IR}}$ ) ことを想定している。

IR 場のふるまいに興味があるので、まず式 (3.1.10) の 1 行目を以下のように変形する。

$$\dot{\phi}_{\text{IR}} - \pi_{\text{IR}} = \pi_{\text{UV}} - \dot{\phi}_{\text{UV}} = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}}(t)\dot{\theta}(k - \epsilon aH). \quad (3.1.12)$$

計算は定義を代入しただけである。2 行目も同様にして、

$$\begin{aligned} & \dot{\pi}_{\text{IR}} + 3H\pi_{\text{IR}} - a^{-2}\nabla^2\phi_{\text{IR}} + V'(\phi_{\text{IR}}) \\ &= -\dot{\pi}_{\text{UV}} - 3H\pi_{\text{UV}} + a^{-2}\nabla^2\phi_{\text{UV}} - V''(\phi_{\text{IR}})\phi_{\text{UV}} \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \dot{\theta}(k - \epsilon aH)\pi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

ただし、 $\phi$  の元の運動方程式として、

$$\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \left( \frac{k^2}{a^2} + V''(\phi_{\text{IR}}) \right) \phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad \text{for } k > \epsilon aH \quad (3.1.14)$$

が成り立つとした。階段関数の微分、

$$\frac{d}{dt}\theta(k - \epsilon aH) = -\epsilon aH^2\delta(k - \epsilon aH), \quad (3.1.15)$$

を用いれば、最終的に IR 場に対する運動方程式、

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{\text{IR}} = \pi_{\text{IR}} + \epsilon aH^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{k}} \delta(k - \epsilon aH), \\ \dot{\pi}_{\text{IR}} = -3H\pi_{\text{IR}} - V'(\phi_{\text{IR}}) + \epsilon aH^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \pi_{\mathbf{k}} \delta(k - \epsilon aH), \end{cases} \quad (3.1.16)$$

を得る。ただし IR 場の空間微分は小さいとして無視した。

さて、こうしてみると IR に対する運動方程式は通常の Klein-Gordon に各行最後の項が加わった形をしているが、これらの項は UV モードだった成分が宇宙膨張によってホライズンを出て、時々刻々と IR モードに加わる効果を表している。窓関数として階段関数を選んだので、各時刻に IR に加わるのは  $k = \epsilon aH$  のモードだけである。これらはもともと量子場であるが、古典場である IR に加わることになったので、ここで“古典化”しておこう。

わかりやすいように各行最後の項をそれぞれ  $\xi_\phi$ 、 $\xi_\pi$  と書き、これらの量子的性質を調べよう。まず Bunch-Davies の仮定より  $\langle \phi_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \pi_{\mathbf{k}} \rangle = 0$  なので、 $\langle \xi_\phi \rangle = \langle \xi_\pi \rangle = 0$ 。次に分散は、 $k_c(t) = \epsilon aH$  として、

$$\begin{aligned} & \langle \xi_\phi(t, \mathbf{x}) \xi_\phi(t', \mathbf{x}') \rangle \\ &= k_c(t)k_c(t')H^2 \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \langle \phi_{\mathbf{k}}(t) \phi_{\mathbf{k}'}(t') \rangle \delta(k - k_c(t)) \delta(k' - k_c(t')) \\ &= k_c^2(t)H^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \delta(k_c(t) - k) \frac{\delta(t - t')}{k_c(t)H} \frac{2\pi^2 \mathcal{P}_\phi(t, k)}{k^3} \\ &= H\mathcal{P}_\phi(t, k_c) \frac{\sin(k_c r)}{k_c r} \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

ただし  $\mathcal{P}_\phi(t, k)$  は  $\phi$  のパワースペクトル、

$$\langle \phi_{\mathbf{k}}(t) \phi_{\mathbf{k}'}(t) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\phi(t, k) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (3.1.18)$$

であり、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  である。途中  $\delta(k_c(t) - k) \delta(k_c(t') - k') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \delta(k_c(t) - k_c(t')) \delta(k_c(t) - k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$  や、 $\delta(k_c(t) - k_c(t')) = \delta(t - t')/k_c H$  等を使った。 $\epsilon \ll 1$  であり  $k_c = \epsilon aH$  は十分スーパーホライズンなので、インフラトンの質量を無視する近似で  $\mathcal{P}_\phi(t, k_c) = (H/2\pi)^2$  であるから、結局、

$$\langle \xi_\phi(t, \mathbf{x}) \xi_\phi(t', \mathbf{x}') \rangle = \frac{H^3}{(2\pi)^2} \frac{\sin(k_c r)}{k_c r} \delta(t - t'), \quad (3.1.19)$$

を得る。同様に  $\langle \xi_\pi(t, \mathbf{x}) \xi_\pi(t', \mathbf{x}') \rangle$  を計算すると  $\mathcal{P}_\phi$  が定数に漸近することからゼロになる\*3。

まず時間依存性の部分を見てみれば、 $\delta(t-t')$  に比例しており、これを白色スペクトルと呼ぶ (時間について Fourier 変換すればすべての振動数モードを等しい重みで含んでいることだ)。これは窓関数を階段関数にしたことで、各時刻に IR に加わるのが 1 モードだけになったことに由来しており、従って窓関数を滑らかな関数にすれば、有色スペクトルになる。次に空間依存性を見れば、 $\sin(k_c r)/k_c r$  に比例している。これは  $k_c r > 1$  で速く振動する関数であるし、我々は粗視化された場について考えているので、ほぼ階段関数で置き換えることができる。

$$\frac{\sin(k_c r)}{k_c r} \simeq \theta(1 - k_c r). \quad (3.1.20)$$

さらに  $\phi_{\mathbf{k}}$  は真空ゆらぎ、すなわちガウス分布に従うことを考えれば (つまり Wick の定理が使えるということである)、 $\xi_\phi$  は各ホライズン  $k_c = \epsilon a H$  スケール毎に独立な、ガウス白色雑音と同じ統計性を持つことになる。従って以降、 $\xi_\phi$  は量子演算子ではなく白色雑音として扱い、これを量子ゆらぎの“古典化”とする。 $\xi_\pi$  は分散がゼロになるので無視しよう。1 に規格化された雑音、

$$\langle \xi(t, \mathbf{x}) \xi(t', \mathbf{x}') \rangle = \theta(1 - k_c |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(t - t'), \quad (3.1.21)$$

を新たに雑音変数として用いることにすれば、IR 場の運動方程式は、

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{\text{IR}} = \pi_{\text{IR}} + \frac{H^{3/2}}{2\pi} \xi, \\ \dot{\pi}_{\text{IR}} = -3H\pi_{\text{IR}} - V'(\phi_{\text{IR}}), \end{cases} \quad (3.1.22)$$

となる。特にスローロール近似  $\dot{\pi}_{\text{IR}} \simeq 0$  の下では、

$$3H\dot{\phi}_{\text{IR}} + V'(\phi_{\text{IR}}) = \frac{3H^{5/2}}{2\pi} \xi, \quad (3.1.23)$$

である。

このように運動方程式に揺動項が入った式を Langevin 方程式という。ここではホライズンスケールで粗視化された IR 場の運動方程式が Langevin 方程式になることを、スカラー場の運動方程式を直接 IR と UV に分けることから導いた。導出から明らかなように揺動項は、それまで量子ゆらぎだった UV モードが、宇宙膨張により古典 IR 場に加わることから来ている。この節での導出は、直感的であり見通しが良いが、いささか正確性に欠けるように思えるかもしれない。そこで次節では経路積分を用いてより正確に Langevin 方程式を導出しよう。

\*3 ただし Bessel 関数の漸近形の 2 次までとると、 $\xi_\phi$  の分散には  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 、 $\xi_\pi$  の分散には  $\mathcal{O}(\epsilon^4)$  の補正が付く。

## 3.2 Langevin 方程式 II ～ 経路積分からの導出

前節ではスカラー場の運動方程式から IR 場の Langevin 方程式を導出したが、ここでは経路積分の手法で Langevin 方程式を導出しよう [53–55]。ここでは熱場の理論、特に Closed Time Path (CTP) 形式が必要であり、付録 A にまとめてある。

### 3.2.1 スカラー場に対する影響汎関数法

ここではスカラー場に対し、影響汎関数法という形式を用いることで IR 場に対する有効作用を導く。まずスカラー場の作用は、

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \right], \quad (3.2.1)$$

である。ただし時空は計量ゆらぎを無視して、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2 = a^2(\tau) (-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2), \quad (3.2.2)$$

とする。ここで  $\tau$  は共形時間といい、 $ad\tau = dt$  で定義される。特に純 de Sitter 時空  $a = e^{Ht}$  ( $H = \text{const.}$ ) においては  $\tau = -(aH)^{-1}$  とできる。一般に  $\tau < 0$ ,  $\tau \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ),  $\tau \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) とすることが多く、常に負であることには注意が必要である。また  $V(\phi)$  は質量項を除いたスカラー場のポテンシャルである。さて、前節と同様にスカラー場を IR と UV に分けるが、

$$\phi(x) = \phi_{\text{IR}}(x) + \phi_{\text{UV}}(x), \quad (3.2.3)$$

ここでは窓関数を階段関数に限定せず、一般の射影関数  $W(\mathbf{k}, t)$  で書こう。

$$\phi_{\text{UV}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} W(\mathbf{k}, t) \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.2.4)$$

作用自身も IR 場のみに依る  $S_{\text{IR}}[\phi_{\text{IR}}] = S[\phi_{\text{IR}}]$ 、UV 場のみに依る  $S_{\text{UV}}[\phi_{\text{UV}}] = S[\phi_{\text{UV}}]$ 、両方に依る  $S_{\text{int}}[\phi_{\text{IR}}, \phi_{\text{UV}}]$  に分けておこう。

$$S[\phi] = S_{\text{IR}}[\phi_{\text{IR}}] + S_{\text{UV}}[\phi_{\text{UV}}] + S_{\text{int}}[\phi_{\text{IR}}, \phi_{\text{UV}}]. \quad (3.2.5)$$

さて、分配関数は経路積分により以下のように表される。

$$\begin{aligned} Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_{\text{IR}}^+ \mathcal{D}\phi_{\text{IR}}^- \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^+ \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^- \exp[i(S[\phi^+] - S[\phi^-])] \\ \times \exp \left[ i \int d^4x (J^+(x) \phi^+(x) - J^-(x) \phi^-(x)) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$\mathcal{N}$  は規格化因子を表す単なる記号であり、今後出てくるが、その都度場に依らない定数がすべて繰り込まれているものとし、各々の  $\mathcal{N}$  は数値的には全く異なりうるものとする。また CTP 形式 (付録 A 参照) によりスカラー場の自由度は 2 倍になっており、 $\pm$  はそれぞれ順方向時間経路と逆方向時間経路を示す。後のために場を以下のような二重項で表すこととしよう。

$$J^a = \begin{pmatrix} J^+ \\ J^- \end{pmatrix}, \quad \phi^a = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

この 2 次元空間の計量を  $(1, -1)$  とし、分配関数 (3.2.6) の外場項を内積表記すると楽である。

$$\int d^4x (J^+(x)\phi^+(x) - J^-(x)\phi^-(x)) = J^a \phi_a = J \cdot \phi. \quad (3.2.8)$$

式 (3.2.5) のように作用を分割すれば、

$$\begin{aligned} Z[J_{\text{IR}}, J_{\text{UV}}] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi_{\text{IR}}^\pm e^{i(S_{\text{IR}}^+ - S_{\text{IR}}^- + J_{\text{IR}} \cdot \phi_{\text{IR}})} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^\pm \exp[i(S_{\text{UV}}^+ - S_{\text{UV}}^- + S_{\text{int}}^+ - S_{\text{int}}^- + J_{\text{UV}} \cdot \phi_{\text{UV}})], \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

となる。特に後半の積分、

$$F[\phi_{\text{IR}}; J_{\text{UV}}] = \int \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^\pm \exp[i(S_{\text{UV}}^+ - S_{\text{UV}}^- + S_{\text{int}}^+ - S_{\text{int}}^- + J_{\text{UV}} \cdot \phi_{\text{UV}})], \quad (3.2.10)$$

を影響汎関数と呼び、これを  $F[\phi_{\text{IR}}; J_{\text{UV}}] = \mathcal{N} e^{iS_{\text{IA}}[\phi_{\text{IR}}; J_{\text{UV}}]}$  と表したとき、 $S_{\text{IA}}[\phi_{\text{IR}}; J_{\text{UV}}]$  を影響作用と呼ぶ (IA は influence action の頭文字)。

ここまではただの恒等変換であるが、ここで重要なことは UV 場に関する積分に対しては通常の摂動論が良いということである。それは前章で見たように十分サブホライズンなモードはほぼ自由場で近似されるからである。従って影響汎関数  $F[J_{\text{UV}}]$  は摂動的に解くことが可能である。さらに IR 場は“古典場”であったことを思い出そう。すなわち IR 場に関する積分は IR 場の真空期待値  $\varphi = \langle \phi_{\text{IR}} \rangle$  まわりの寄与がほとんどすべてであり、結局分配関数は以下のようにになると期待できる。

$$Z[J_{\text{IR}, \text{UV}}] = \mathcal{N} e^{i(S[\varphi^+] - S[\varphi^-] + S_{\text{IA}}[\varphi; J_{\text{UV}}] + J_{\text{IR}} \cdot \varphi)}. \quad (3.2.11)$$

これを  $e^{iW[J]}$  と書けば  $W[J]$  の変数を  $J$  から場の真空期待値  $\langle \phi \rangle$  に Legendre 変換した  $\Gamma[\langle \phi \rangle]$  が有効作用である。

$$\Gamma[\langle \phi \rangle] = W[J] - J \cdot \langle \phi \rangle, \quad (3.2.12)$$

UV 場に関してはほぼ自由場であるので、 $W[J]$  に対する場の真空期待値の寄与はほぼ  $J \cdot \phi$  項から来ているとすれば、Legendre 変換の  $-J \cdot \langle \phi \rangle$  項で消える。IR 場に対して



は明らかに  $J_{\text{IR}} \cdot \varphi$  が消し合うので、従って IR 場に対する有効作用は単に  $W[J]$  で単に  $J = 0$  としたものに等しい。結局以下の有効作用を得ることが出来た。

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi^+] - S[\varphi^-] + S_{\text{IA}}[\varphi; J = 0]. \quad (3.2.13)$$

特に UV 場の積分に関して、摂動の最低次として質量項までを取り入れた場合、詳細な計算は付録 A にまわすとして、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} S_{\text{IA}}^{(1)} &= \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \varphi_q(x) \text{Re}[\Pi(x, x')] \varphi_q(x') \\ &\quad - 2 \int d^4x d^4x' \theta(t - t') \varphi_q(x) \text{Im}[\Pi(x, x')] \varphi_c(x'). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

ただし、

$$\Pi(x, x') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^3(t) [P_t \phi_{\mathbf{k}}(t)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a^3(t') [P_{t'} \phi_{\mathbf{k}}^*(t')] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}, \quad (3.2.15)$$

であり、 $P_t$  は以下で定義された微分演算子である。

$$P_t = [\ddot{W}(\mathbf{k}, t) + 3H\dot{W}(\mathbf{k}, t) + 2\dot{W}(\mathbf{k}, t)\partial_t]. \quad (3.2.16)$$

$W(\mathbf{k}, t)$  は冒頭に出てきた窓関数である。また  $\varphi_c$ 、 $\varphi_q$  は Keldysh 基底と呼ばれる表示であり、以下で定義される。

$$\begin{pmatrix} \varphi_c \\ \varphi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} \\ \varphi^+ - \varphi^- \end{pmatrix}. \quad (3.2.17)$$

$\phi_{\mathbf{k}}(t)$  は前章にも出てきた、Bunch-Davies 真空を初期条件に課したモード関数である。

### 3.2.2 揺動項

影響作用 (3.2.14) で特に気になるのが、 $\text{Re}\Pi$  の項が純虚数になっている点である。作用の虚部は何を意味するであろうか。実はこの項が IR 場の運動方程式に揺動項を加えることになる。実際分配関数の重みは  $e^{iS}$  であることから、 $\text{Re}\Pi$  項はガウス分布のようにふるまいそうである。ここでは  $\text{Re}\Pi$  項から揺動項が出ることを詳しく見よう。

具体的な計算を行うために窓関数は階段関数  $\theta(k - \epsilon aH) = \theta_t$  に取ろう。このとき  $\text{Re}\Pi$  項は、

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^3(t) \varphi_q(x) \text{Re}[(3H\dot{\theta}_t + \ddot{\theta}_t + 2\dot{\theta}_t\partial_t) \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ \times (3H\dot{\theta}_{t'} + \ddot{\theta}_{t'} + 2\dot{\theta}_{t'}\partial_{t'}) \phi_{\mathbf{k}}(t') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}] a^3(t') \varphi_q(x'). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$



モード関数  $\phi_{\mathbf{k}}(t)$  は自由場の解 (2.3.23)、

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H\tau^{3/2} H_{\nu}^{(1)} \left( \frac{k}{aH} \right), \quad (3.2.19)$$

を用いよう。ただしインフラトンの質量を  $m$  として、

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}}. \quad (3.2.20)$$

また  $H_{\nu}^{(1)}(x)$  は第 1 種 Hankel 関数である。このモード関数に対しては、カットオフスケール ( $k = \epsilon aH$ ) 上で以下の関係が成り立つ。

$$\dot{\phi}_{\mathbf{k}}(t)|_{k=\epsilon aH} = \phi_{\mathbf{k}}(t)|_{k=\epsilon aH} q_{\nu}(\epsilon). \quad (3.2.21)$$

ただし、

$$q_{\nu}(\epsilon) = -H \left( \left( \frac{3}{2} - \nu \right) + \epsilon \frac{H_{\nu-1}^{(1)}(\epsilon)}{H_{\nu}^{(1)}(\epsilon)} \right). \quad (3.2.22)$$

これらを用い、また  $\theta$  の 2 階微分が 1 階になるよう部分積分を行えば、式 (3.2.18) は、

$$\frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \text{Re}[Q(x)A(x, x')Q^*(x')], \quad (3.2.23)$$

となる。ここで、

$$Q(x) = (\varphi_q(x)q_{\nu}(\epsilon) - \dot{\varphi}_q(x))a^3(t), \quad (3.2.24)$$

であり、また、

$$\begin{aligned} A(x, x') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \dot{\theta}_t \phi_{\mathbf{k}}(t) \dot{\theta}_{t'} \phi_{\mathbf{k}}^*(t') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= \frac{H^3}{8\pi} \epsilon^3 |H_{\nu}^{(1)}(\epsilon)|^2 \frac{\sin(\epsilon aHr)}{\epsilon aHr} \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

である。

これで  $\text{Re}\Pi$  項の具体的な表式が求まった。ではこの項の運動方程式への寄与はどのようなものであろうか。もともとの  $+/-$  基底では  $+$  と  $-$  は単に CTP 形式によって複製された自由度であり、古典解は  $\varphi^+ = \varphi^-$  となるはずである。従って Keldysh 基底では  $\varphi_c = (\varphi^+ + \varphi^-)/2$  が求める解を表し、 $\varphi_c$  に対する運動方程式は  $\delta S/\delta\varphi_q|_{\varphi_q=0}$  で与えられる。ところが式 (3.2.23) は  $\varphi_q$  について 2 次式なので、 $\varphi_q$  で変分を取って  $\varphi_q = 0$  とするとゼロになってしまう！ つまりこの項は運動方程式に寄与しないのだろうか。

重要な点はこの項が純虚数であり、分配関数の重みが振動形  $e^{i\text{Re}S}$  ではなく、減衰形  $e^{-\text{Im}S}$  であるということである。普段は振動形の重みが干渉によって作用の停留点以外で

は強く打ち消し合うとして、古典解は作用の停留点に乗るとしているが、作用の虚部に関してその描像はあまりよくない。作用の虚部をより正しく扱うには、恒等式、

$$\exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) = (2\pi a)^{-1/2} \int dy \exp\left(-\frac{1}{2a}y^2 + ixy\right), \quad (3.2.26)$$

を用いて、虚部をくくり出すことを行う。つまり以下のようにする。

有効作用  $\Gamma[\varphi]$  は補助場  $\xi_{R,I}$  を導入することで、影響作用 (3.2.14) の  $\text{Im}\Pi$  項を除けば、

$$\exp(i\Gamma[\varphi]) = \int \mathcal{D}\xi_R \mathcal{D}\xi_I P[\xi_I] \exp(iS_{\text{eff}}[\varphi]), \quad (3.2.27)$$

のように表せる。ここで  $P[\xi]$  はガウス分布重み、

$$P[\xi] = \left(2\pi\sqrt{\det A}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \xi(x) A^{-1}(x, x') \xi(x')\right), \quad (3.2.28)$$

であり、

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}[\varphi] &= S[\varphi^+] - S[\varphi^-] \\ &+ \int d^4x [\xi_R(x) \text{Re}Q(x) + \xi_I \text{Im}Q(x)], \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

である。このようにガウス分布重みをくくり出すことによって新たな有効作用  $S_{\text{eff}}$  は実数になっていることが重要である。運動方程式は複素有効作用  $\Gamma$  ではなく実有効作用  $S_{\text{eff}}$  を変分して求めるべきで、従って、

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \varphi_q} \right|_{\varphi_q=0} \\ &= \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - a^{-2}\nabla^2\varphi + m^2\varphi + V'(\varphi) \\ &\quad - (q_R + 3H)\xi_R - \dot{\xi}_R - q_I \xi_I, \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

が求める運動方程式である。ここで  $\varphi_c$  は簡単のため  $\varphi$  と表し、 $q_{R,I}$  はそれぞれ  $q_\nu(\epsilon)$  の実部と虚部である。この運動方程式中で  $\xi_{R,I}$  はそれぞれ重み  $P[\xi]$  を持ったガウス雑音として扱う。これらの相関は、

$$\begin{aligned} \langle \xi_R(x) \xi_R(x') \rangle &= \int \mathcal{D}\xi_R P[\xi_R] \xi_R(x) \xi_R(x') \\ &= A(x, x'), \\ \langle \xi_I(x) \xi_I(x') \rangle &= \int \mathcal{D}\xi_I P[\xi_I] \xi_I(x) \xi_I(x') \\ &= A(x, x'), \\ \langle \xi_R(x) \xi_I(x') \rangle &= \int \mathcal{D}\xi_R P[\xi_R] \mathcal{D}\xi_I P[\xi_I] \xi_R(x) \xi_I(x') \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

と計算される。以上より経路積分の手法で揺動項が導出された。

前節との対応も見ておこう。零質量の近似で  $\nu \simeq 3/2$  であり、 $\text{Re}\nu > 0$  に対する  $x \rightarrow 0$  での Hankel 関数の漸近形、

$$H_\nu^{(1)}(x) \rightarrow -i \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \quad (3.2.32)$$

を用いれば、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  より、

$$A(x, x') \simeq \frac{H^3}{(2\pi)^2} \frac{\sin(\epsilon a H r)}{\epsilon a H r} \delta(t - t'), \quad (3.2.33)$$

となり、これは式 (3.1.19) に一致している。また  $q_\nu(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$  であるので、雑音の時間微分項を無視すれば、 $\epsilon$  の最低次では揺動項は  $3H\xi_R$  しか残らず、従って前節の結果に一致する。

この項では作用の虚部からガウス分布重みをくくり出すことで揺動項が生じることを見た。もし複素有効作用をそのまま変分すれば、運動方程式中で雑音  $\xi$  を、平均値  $\langle \xi \rangle = 0$  で置き換えることになるが、それは  $\xi$  の分散が大きい時によくはないことは明らかである。またガウス分布重みを持つ  $\xi$  は分配関数の寄与において重みが干渉を起こさないので、量子ゆらぎではなく統計ゆらぎとして扱えるということになる。

またこの項では影響作用の  $\text{Im}\Pi$  項は無視したが、実際この項は  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  の寄与しか与えない。揺動散逸定理の観点から言えば、揺動がある時、同じ起源から散逸項 ( $\dot{\phi}$  に比例した項) も生じるはずであるが、事実  $\text{Im}\Pi$  項からは散逸項と質量補正が生じる。しかしこれらは小さいし、散逸項については宇宙膨張による散逸  $3H\dot{\phi}$  が支配的であり、 $\text{Im}\Pi$  項の寄与は無視できる。ちなみに揺動散逸定理によれば、揺動項と散逸項の比が熱浴の温度  $T$  を与えるが、今回の場合その比は de Sitter 時空の Hawking 温度  $T = H/2\pi$  に一致する。

### 3.3 インフレーションダイナミクスへの揺動項の影響

前2節で揺動項を2通りの方法で導いたので、章の冒頭で述べた懸念事項の1つ目、インフレーションダイナミクスが揺動によって大きく変わるか否かについて議論しよう。ここでは揺動の効果が見やすいよう、ポテンシャルにタキオン不安定性を持つハイブリッドインフレーションというモデルについて考える。ハイブリッドインフレーションについては第5章で詳しく述べるのでここでは揺動項がインフレーションダイナミクスに与える影響についてのみ絞って考察しよう。

まずハイブリッドインフレーションとはスカラー場が2つ ( $\phi$  と  $\psi$  と呼ぼう) 存在するインフレーションモデルで、特にポテンシャルが以下の形のものを言う。

$$V(\phi, \psi) = \Lambda^4 \left[ \left(1 - \frac{\psi^2}{M^2}\right)^2 + \frac{\phi^2}{\mu^2} + 2 \frac{\phi^2 \psi^2}{\phi_c^2 M^2} \right]. \quad (3.3.1)$$

$\Lambda$ 、 $M$ 、 $\mu$ 、 $\phi_c$  は模型のパラメータである。 $\psi$  に関しては4次ポテンシャルが存在するので、 $\phi$  よりも早く  $\psi \simeq 0$  に落ち着くが、2次ポテンシャルが負で入っている点がミソである。 $\phi$ 、 $\psi$  に関してそれぞれ有効質量を計算してみれば、

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &= \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{2\Lambda^4}{\mu^2} + \frac{4}{\phi_c^2 M^2} \psi^2, \\ m_\psi^2 &= \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \frac{4\Lambda^4}{M^2} \left( \frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 \right) + \frac{12\Lambda^4}{M^4} \psi^2. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

特に  $\psi \simeq 0$  で考えると、 $m_\psi^2$  は  $\phi > \phi_c$  では正であるが、 $\phi < \phi_c$  では負になっている！このタキオン不安定性により  $\phi < \phi_c$  になると  $\psi$  は  $\psi \simeq 0$  から急激に成長する。この急激な成長があたかも  $\psi$  が  $\psi \simeq 0$  からポテンシャル最小点に転がり落ちているように見えるので、 $\psi$  を滝場と呼び、 $\phi < \phi_c$  以降を滝相と呼ぶ。一方  $\phi > \phi_c$  では  $m_\psi^2$  は正であり、 $\psi \simeq 0$  に沿ったまま  $\phi$  が原点に転がるので、 $\phi > \phi_c$  を谷相と呼ぶ<sup>\*4</sup>。滝場に入っただけですぐにスローロール条件が破れ、インフレーションが終わる模型が典型的ではあるが、パラメータによっては滝場で長時間インフレーションが続くような模型も考えられる。そしてこのような場合、タキオン不安定性が揺動の効果を増幅するので、揺動によってインフレーションダイナミクスが大きく変わりうる。

文献 [56] ではパラメータを以下の値にとって数値計算している。

$$\begin{aligned} \mu/M_p &= 3190.4, \\ M/M_p &= 0.1503, \\ \phi_c/M_p &= 0.1503, \\ \Lambda/M_p &= 0.01418. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

ただし  $M_p$  は換算 Planck 質量である。このパラメータで初期値を  $(\phi_i, \psi_i) = (1.0001\phi_c, 10^{-9})$  にとった場合、揺動なしで運動方程式を解くと、谷相で 505 e-foldings、滝相で 747 e-foldings、全部で 1252 e-foldings かかる<sup>\*5</sup>。一方  $\mathcal{P}_\phi = \mathcal{P}_\psi = (H/2\pi)^2$  の分散を持つ揺動項を入れた場合、かかる e-foldings の平均はなんと  $\langle N \rangle \sim 50$  まで減少することがわかった！インフレーションの持続時間がこれほど変化したのだから、この場合揺動項を無視することは出来ないということである。

ハイブリッドインフレーションにおいて揺動がこれほど重要な効果を与えた背景には、滝場のタキオン不安定性が密接に絡んでいる。揺動がない場合、谷相では滝場の大きな質量のため  $\psi$  はほぼゼロになっているが、揺動がある場合は拡散して  $\langle \psi^2 \rangle$  がゼロでない値

<sup>\*4</sup> ただし一般的に  $\phi$  は谷場とは呼ばずインフラトン場と呼ぶ。これは歴史的に  $\phi$  がインフレーションの大部分を担い、滝場はインフレーションを終わらせるためだけに導入された模型が初めに考えられたからである

<sup>\*5</sup> e-foldings とは無次元化された時間である。詳しくは第2章参照

を持つ。このまま滝相に入ると、滝相では  $\psi^2$  が大きいほどポテンシャルの傾きも大きいので、揺動がある場合の方がより早く滝場が成長しインフレーションを終わらせる。またインフラトンの方に関しても、 $m_\phi^2$  中の  $4\psi^2/\phi_c^2 M^2$  項により、揺動があつて  $\langle \psi^2 \rangle$  が大きくなっている方が、インフラトン質量が大きくなり、やはりインフレーションを早く終わらせる方に働く。これらの効果により、e-foldings が大きく変化したのである。



## 第 4 章

# ストカスティック- $\delta N$

前章では量子ゆらぎの背景場への反跳を取り入れるストカスティック形式を導入した。これによれば、スーパーホライズンスケールで粗視化された背景場の運動方程式に揺動項が取り入れられることがわかった。前章の最後では揺動により、インフレーションの平均ダイナミクス自体が大きく変更を受けうることを見た。この章ではインフレーションの重要課題、曲率ゆらぎの生成をストカスティック形式の下で見てみよう [1, 57–60]。

### 4.1 ストカスティック- $\delta N$ 形式におけるゆらぎの計算手法

第 2 章では一様背景場の下で場の理論を展開し、インフラトン場の相関関数を計算した後、それを曲率ゆらぎの相関関数に変換した。ストカスティック形式ではそもそも背景場自身がゆらいでいるのでこのような計算はできない。ところがよくよく考えてみるとそもそも観測量はスーパーホライズンスケールで粗視化された曲率ゆらぎであり、これは揺動によって作られる背景場のスーパーホライズンスケールのゆらぎに起因するはずである。すなわち、ストカスティック形式ではスーパーホライズンスケールのゆらぎが揺動項によって自動的に作られるのである。揺動が入った運動方程式を解くことそのものがゆらぎの計算にもなっているということである。

ストカスティック形式では異なる空間点に対する相関の情報はずべて、揺動の相関、

$$\langle \xi(t, \mathbf{x}) \xi(t', \mathbf{x}') \rangle \simeq \theta(1 - \epsilon a H |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(t - t'), \quad (4.1.1)$$

に凝縮されている。相関の空間依存性を階段関数で近似したので、揺動は各ホライズン毎に独立である。従って、異なる 2 点でのインフラトン場  $\phi$  は、2 点がホライズンスケール程度離れるまでは完全に同一な進化をし、ホライズンスケール程度離れて以降は独立な進化をすることになる。すなわち揺動の相関が切れる時刻が 2 点の距離の情報を含んでおり、2 点が離れるほどより過去に 2 点は独立に進化し始めるということである。





このような状況化で Fokker-Planck 方程式を解くことは、解析的にも数値計算的にも困難である。

ところでここで、真に求めたかったものは場の相関ではなく曲率ゆらぎの相関であったことを思い出そう。そして第 2 章で説明した  $\delta N$  形式によれば、インフレーションの持続時間、e-foldings  $N$  のゆらぎが曲率ゆらぎそのものであった。ストカスティック形式では運動方程式に各ホライズン毎に独立な揺動が入るので、この意味でそれぞれのホライズンのインフレーションの持続時間は異なるはずである。これを利用して曲率ゆらぎを求めてみよう。

具体的には次のような手法をとる。

1. インフレーションの仮の初期値  $\phi_i$  を決める。
2.  $\phi_i$  から Langevin 方程式を解くことで、インフラトンが終了値  $\phi_f$  <sup>\*1</sup> に初めて到達するまでの e-foldings  $N$  を求める。これは揺動によって計算するごとに異なる値を与えるので、この計算を繰り返せば  $\langle N \rangle$ 、 $\langle \delta N^2 \rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$ 、 $\langle \delta N^3 \rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle$  等々統計量を得ることができる。計算を繰り返すことは、それぞれ別のホライズンの時間発展を追っていることに対応する。
3. 今度は仮の初期値  $\phi_i$  を変えることで、また新たな  $\langle N \rangle$ 、 $\langle \delta N^2 \rangle$  等の統計量の組を得られる。従って  $\phi_i$  を様々に変えれば  $\langle N \rangle$ 、 $\langle \delta N^2 \rangle$ 、 $\langle \delta N^3 \rangle$  等の間の関係性がわかり、 $\langle \delta N^2 \rangle$ 、 $\langle \delta N^3 \rangle \dots$  を  $\langle N \rangle$  の関数として記述できる。
4. ここでは曲率ゆらぎの 2 点相関に注目するとして、相関関数の Fourier 変換、パワースペクトル  $\mathcal{P}_\zeta(k)$ 、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \mathcal{P}_{\delta N}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \int d^3x \langle \delta N(0) \delta N(\mathbf{x}) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.1.2)$$

を求めたいとする。パワースペクトルを逆 Fourier 変換すれば e-foldings の分散

\*1 この章では終了値はスローロール条件が破れる点として定めている。これはスローロール条件が破れると揺動があっても場は素早く振動し、もはやインフレーションは起こらないことを想定しているからであるが、厳密にはスローロール条件が破れた後も揺動によってインフラトン場がポテンシャルを廻り、再びインフレーションを起こす可能性はある。また単一スカラー場のモデルであればスローロール条件が破れる点は一意に定まり、エネルギー密度一定面を張るため、 $\delta N$  形式の終了面としてふさわしいが、複数スカラー場がある時、スローロール条件が破れる点はスカラーのたどる軌跡により、必ずしもいつも同じエネルギー密度で起こるわけではないという問題がある。いずれにせよ、より厳密に行うにはインフレーション後の振動期まで計算を延長しなければならないだろう。

$\langle \delta N^2 \rangle$  を表現できる。

$$\begin{aligned}
 \langle \delta N^2 \rangle &= \int_{k_i}^{k_f} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\delta N}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{0}} \\
 &= \int_{k_i}^{k_f} \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta N}(k) \\
 &= \int_{\ln k_f - \langle N \rangle}^{\ln k_f} \mathcal{P}_{\delta N} dN. \tag{4.1.3}
 \end{aligned}$$

インフレーション中のみゆらぎが生成されるとすると、積分範囲  $k_i < k < k_f$  はインフレーション開始時のホライズンスケール  $k_i = \epsilon a H|_i$  からインフレーション終了時のホライズンスケール  $k_f = \epsilon a H|_f$  までであり、これらの間にはおよそ  $k_i \simeq k_f e^{-\langle N \rangle}$  の関係がある。ここでは簡単のためむしろ  $k_i$  を  $k_f e^{-\langle N \rangle}$  で定義し、この範囲で積分を行うこととする。最後の行へは積分の変数変換  $d \ln k = dN$  を行った。左辺は処方 3. までで  $\langle N \rangle$  の関数として得られているので、両辺を  $\langle N \rangle$  で微分すれば、パワースペクトルを得られる。

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \mathcal{P}_{\delta N}(k) = \left. \frac{d}{d \langle N \rangle} \langle \delta N^2 \rangle \right|_{\langle N \rangle = \ln(k_f/k)}. \tag{4.1.4}$$

ストカスティック形式でパワースペクトルを求める処方箋は以上である。第 2 章で説明した通常の  $\delta N$  形式との対応はどのようにつくであろうか。特に通常の  $\delta N$  形式では初期値  $\phi_i$  のゆらぎが e-foldings のゆらぎにつながるが、ここでは初期値  $\phi_i$  にはゆらぎは入っていない。これらは次のように理解できる。

通常の  $\delta N$  形式で初期値に入れるゆらぎは、その初期時刻にちょうどホライズンを出るモードからの寄与のみである。一方ストカスティック形式で処方 2. において同じ初期値から各ホライズンの時間発展を開始したとしても、その無限小時間後にはちょうどその時刻にホライズンを出るモードが揺動項を通して背景場にゆらぎを与える。ストカスティック形式では以降も各時刻に揺動が入り続けるが、パワースペクトルを求めるには処方 4. で  $\langle \delta N^2 \rangle$  を  $\langle N \rangle$  で微分し、 $\langle N \rangle = \ln(k_f/k)$  となる時刻をとるので、まさに初期時刻直後にホライズンを出たモードだけを拾ってきていることになる。この点で通常の  $\delta N$  形式とストカスティック- $\delta N$  形式は対応している。異なるのはストカスティック形式では波数対応に e-foldings の平均値  $\langle N \rangle$  を用いている点であり、もし揺動により e-foldings の平均値そのものが、揺動を入れなくて得られる e-foldings の値からずれるような場合であれば、通常の  $\delta N$  とは対応する波数が異なってくる。e-foldings の平均をずらすのは考えたいモードがホライズンを出た後の揺動であるので、この意味でストカスティック形式では短波長モードからの長波長への寄与が考慮されていることになる。また、初期時刻でもそれまでにホライズンを出た長波長なゆらぎは乗っているはずであるが、これは十分長波長

なので均してしまってもよいと考えられ、通常の  $\delta N$  でもこれらの効果は考えられていない。

ストカスティック形式では揺動項によって自動的に e-foldings がゆらぐので、通常の  $\delta N$  形式のように e-foldings をインフラトン場で展開する必要がない。この意味でストカスティック形式では曲率ゆらぎを非摂動的に求めることができる。これは上で述べたように、e-foldings の平均がずれる効果からストカスティック形式では違うモード間の相互作用があることにも表れている。もともとストカスティック形式は量子ゆらぎの反跳、すなわち非線形効果を考えるために導入したが、第 3 章の冒頭でにらんだ通り、量子ゆらぎを古典化して扱うことでゆらぎを非摂動的に扱うことに成功したわけである。

次節では具体的に単一スカラー場のスローロールインフレーションにストカスティック- $\delta N$  を適応してみよう。

## 4.2 単一場スローロールインフレーション

ストカスティック形式で曲率ゆらぎのパワースペクトルを求める処方箋が得られたので、ここでは単一場スローロールインフレーションに適応してみる。Langevin 方程式を解析的に解くには確率解析の数学が必要であり、それについては付録 B にまとめてあるので参照されたし。またこの節では場の IR 下付き添字は式が煩雑になるのを防ぐため落とす。

### 4.2.1 パワースペクトル

ここではまず、e-foldings を解析的に求めるために、Hubble パラメータを場に対して直線近似する。

$$H(\phi) \simeq H_0 - \alpha\phi. \quad (4.2.1)$$

$\alpha$  は正定数でインフレーション中は  $H_0 \gg \alpha|\phi|$  が満たされており、Hubble パラメータはほぼ定数とみなせるとする。次に揺動ありのスローロール方程式 (3.1.23) は、Friedmann 方程式  $3M_p^2 H^2 \simeq V$  を用いれば、

$$\dot{\phi} + 2M_p^2 H'(\phi) = \frac{H^{3/2}(\phi)}{2\pi} \xi(t), \quad (4.2.2)$$

と変形できる。さらに時間変数を e-foldings に変換し ( $dN = Hdt$ )、 $H' \simeq -\alpha$ 、 $H \simeq H_0$  の近似を用いれば、

$$\frac{2\pi}{H_0} \frac{d\phi}{dN} = \frac{4\pi M_p^2 \alpha}{H_0^2} + \xi(N). \quad (4.2.3)$$

ただし、 $\xi(N)$  は時間変数を  $N$  とした、1 に規格化されたガウス白色雑音である。

$$\langle \xi(N) \rangle = 0, \quad \langle \xi(N)\xi(N') \rangle = \delta(N - N'). \quad (4.2.4)$$

ちなみに  $\xi(t)$  とはデルタ関数の変数変換を通じて  $\xi(N) = \xi(t)/H_0^{1/2}$  の関係がある。式 (4.2.3) を積分すれば、

$$\frac{2\pi}{H_0}(\phi(N) - \phi_i) = \frac{4\pi M_p^2 \alpha}{H_0^2} N + \int_0^N \xi(N') dN'. \quad (4.2.5)$$

ただし  $\phi_i = \phi(N=0)$  と初期時刻を定めている。

右辺第 1 項が等速直線運動を表しているのは明らかだが、実は右辺第 2 項はブラウン運動  $W(N)$  という確率過程になっている。ブラウン運動の厳密な定義は付録 B で与えるが、ここではブラウン運動の特徴、期待値がゼロで分散  $\langle W^2(N) \rangle$  が  $N$  のガウス分布に右辺第 2 項が従うか軽くチェックしよう。まず期待値は、

$$\left\langle \int_0^N \xi(N') dN' \right\rangle = \int_0^N \langle \xi(N') \rangle dN' = 0. \quad (4.2.6)$$

次に分散は、

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \int_0^N \xi(N') dN' \right)^2 \right\rangle &= \int_0^N dN' \int_0^N dN'' \langle \xi(N')\xi(N'') \rangle \\ &= \int_0^N dN' \int_0^N dN'' \delta(N' - N'') \\ &= \int_0^N dN' = N. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

最後にガウス分布であることは  $\xi(N)$  自身がそうであったことから従う。より厳密なブラウン運動との等価性は付録 B で議論するとして、以上より右辺第 2 項はブラウン運動  $W(N)$  であることを認めよう。そうすれば、 $X(N) = (2\pi/H_0)(\phi(N) - \phi_i)$ 、 $\mu = 4\pi M_p^2 \alpha/H_0^2$  と定義して、式 (4.2.5) はとても簡単な形、

$$X(N) = \mu N + W(N), \quad (4.2.8)$$

と書ける。これはドリフト付きブラウン運動と呼び、等速直線運動にブラウン運動が乗っている過程を表している。ドリフト付きブラウン運動は非常に初等的確率過程であり、様々な性質を厳密に求めることができる。運動方程式がこのように簡単になったのは、Hubble パラメータをほぼ定数な直線で近似したおかげである。

さて、曲率ゆらぎを求めるには  $\phi_i$  から  $\phi_f$  (あるいは  $X_i = 0$  から  $X_f = (2\pi/H_0)(\phi_f - \phi_i)$ ) に初めて到達するまでの時刻  $N_f$  の統計的性質を求めなければならない。実はドリ

フト付きブラウン運動の場合、 $N_f$  の母関数を求めることができ、それは以下のようになる (付録 B 参照)。

$$\langle e^{-JN_f} \rangle = e^{X_f(\mu - \sqrt{2J + \mu^2})}. \quad (4.2.9)$$

$J$  は正の任意定数であり、これの両辺を  $J$  で任意関数微分し  $J \rightarrow 0$  とすれば、 $N_f$  の任意次数モーメントも求めることができる。例えば  $N_f$  の期待値は、

$$\begin{aligned} \langle N_f \rangle &= -\frac{d}{dJ} \langle e^{-JN_f} \rangle \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= -\frac{d}{dJ} e^{X_f(\mu - \sqrt{2J + \mu^2})} \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \frac{X_f}{\mu}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

となる。今等速直線運動の速度は  $\mu$  であるので、これは直感にもよく合う。同様にして 2 次、3 次のモーメントも求めることができ、結果は、

$$\langle N_f^2 \rangle = \frac{X_f^2}{\mu^2} + \frac{X_f}{\mu^3}, \quad \langle N_f^3 \rangle = \frac{X_f^3}{\mu^3} + 3\frac{X_f^2}{\mu^4} + 3\frac{X_f}{\mu^5}, \quad (4.2.11)$$

となる。これらから、ゆらぎを  $\delta N_f = N_f - \langle N_f \rangle$  と定義すれば、そのモーメントも、

$$\begin{aligned} \langle \delta N_f \rangle &= 0, \\ \langle \delta N_f^2 \rangle &= \langle N_f^2 \rangle - \langle N_f \rangle^2 = \frac{X_f}{\mu^3} = \frac{1}{\mu^2} \langle N_f \rangle, \\ \langle \delta N_f^3 \rangle &= \langle N_f^3 \rangle - 3\langle N_f^2 \rangle \langle N_f \rangle + 2\langle N_f \rangle^3 = 3\frac{X_f}{\mu^5} = \frac{3}{\mu^4} \langle N_f \rangle, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

と計算できる。

前節に与えた処方によれば、曲率ゆらぎのパワースペクトルを求めるには、e-foldings の分散をその期待値で微分すればよいのであった。従って、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{d}{d\langle N_f \rangle} \langle \delta N_f^2 \rangle \Big|_{\langle N_f \rangle = \ln(k_f/k)} = \frac{1}{\mu^2}. \quad (4.2.13)$$

一方これを線形摂動理論で求めた結果と比較するために、スローロールパラメータ  $\epsilon_H$  を導入しよう。

$$\epsilon_H = 2M_p^2 \left( \frac{H'}{H} \right)^2 \simeq 2M_p^2 \frac{\alpha^2}{H_0^2}. \quad (4.2.14)$$

これとスローロールでの Friedmann 方程式  $3M_p^2 H^2 \simeq V$  を用いれば、パワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{1}{24\pi^2 M_p^4 \epsilon_H}, \quad (4.2.15)$$

と書き直せる。そしてこれは第2章で求めた線形摂動理論の結果 (2.4.37) に一致している！

この結果は何を意味しているだろうか。ここでは Hubble パラメータを線形近似したが、より一般の場合においても十分短い時間では Hubble パラメータを線形近似できるだろう。そして、曲率ゆらぎは単一場スローロールインフレーション中ではスーパーホライズンスケールの曲率ゆらぎは保存するのであった。従って Hubble パラメータが少なくとも数 e-foldings は線形近似がよい場合 (そしてそれはスローロールならほぼ満たされるだろう)、古典化をよく定義できるよう、考えているスケールがホライズンを出てから数 e-foldings たったようなある場の値を終了値  $\phi_f$  と決めてしまえば、上の議論はそのまま適用できる。そしてその場合  $\alpha$  や  $H_0$  は、考えているスケールがホライズンを出るあたりで決めればよい。従って単一場スローロールインフレーションモデルでは線形摂動理論の結果とストカスティック形式での結果がほぼ一致することが予想される。

これは単一場スローロールインフレーションでは非ガウス性が小さいという事実とつながりがある。非ガウス性が小さいというのは、通常の  $\delta N$  形式の言葉で言えば、

$$\zeta \simeq \frac{\partial N}{\partial \phi} \delta \phi, \quad (4.2.16)$$

の近似が良い、ということであり、それは線形摂動理論がうまく行くということである。従って非摂動的に曲率ゆらぎを求めるストカスティック形式の結果と、線形摂動理論の結果が一致したのである。非ガウス性については次節でさらに議論しよう。

#### 4.2.2 非ガウス性

ストカスティック形式のさらなる利点として、非摂動的な計算ゆえに、摂動の高次の量も同時に計算できる点が挙げられる。事実前節で与えた処方や、前項の解析計算では e-foldings の高次モーメント  $\langle N^3 \rangle, \langle N^4 \rangle, \dots$  を求めることができることを示した。ここではそれを利用して、曲率ゆらぎの非ガウス性を計算しよう。

前項の最後でも述べたように、今単一場スローロールインフレーションを考えているので、曲率ゆらぎはほぼガウス分布に従うはずである。まずはそれを簡単に確認しよう。例えばガウス分布からのずれを測るのに使える1つの量、歪度  $S_\zeta = \langle \zeta^3 \rangle / \langle \zeta^2 \rangle^{3/2}$  を考えてみるとする。  $\zeta$  が完全にガウス分布なら Wick の定理より  $\langle \zeta^3 \rangle = 0$  と歪度はゼロである。一方、式 (4.2.12) の結果を使えば、

$$S_\zeta = \frac{\langle \zeta^3 \rangle}{\langle \zeta^2 \rangle^{3/2}} = \frac{3}{\mu} \frac{1}{\langle N_f \rangle^{1/2}} = \mathcal{P}_\zeta^{1/2} \frac{3}{\langle N_f \rangle^{1/2}}. \quad (4.2.17)$$

観測的な側面から言うと、現在の観測可能宇宙に対するスーパーホライズンスケールのゆらぎは、我々にとって一様ゼロモードと区別がつかず、ゆらぎとして計上できない。我々



がゆらぎとして観測できるのは、 $N_{\text{obs}} \sim 60$  として  $k_f < k < k_f e^{-N_{\text{obs}}}$  の間のモードだけである。逆にゆらぎの平均を求めるときはこれらのモードを全て足し上げたものになるので、理論的計算でも  $k_f e^{-N_{\text{obs}}}$  までを全て含めて計算するべきである。従って式 (4.2.17) 中で  $N_f$  は  $N_{\text{obs}} \sim 60$  とすべきである。以上より、パワースペクトルが CMB での観測と無矛盾な値、 $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-5}$  であるとするなら、歪度  $S_\zeta$  は 1 より非常に小さくなることがわかる。もちろん尖度  $K_\zeta = \langle \zeta^4 \rangle / \langle \zeta^2 \rangle^2 - 3$  等さらなる高次量も求めることはできるが、ここではひとまずこの結果から曲率ゆらぎはほぼガウス分布に従うものだと想定しよう。

曲率ゆらぎがほぼガウス分布に従うとき、よく使われる非線形性パラメータ  $f_{\text{NL}}$  が便利である。ここでは特に局所型 (local type) 非線形性パラメータ  $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$  を計算してみよう。 $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$  は曲率ゆらぎをガウス分布量  $g(\mathbf{x})$  で 2 次まで近似した時の係数として定義される。

$$\zeta(\mathbf{x}) \simeq g(\mathbf{x}) + \frac{3}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc}} (g^2(\mathbf{x}) - \langle g^2(\mathbf{x}) \rangle). \quad (4.2.18)$$

曲率ゆらぎはほぼガウス分布に従うので  $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$  は 1 より十分小さいだろう。この時、曲率ゆらぎの 2 次、3 次モーメントは、

$$\begin{aligned} \langle \zeta^2 \rangle &= \langle g^2 \rangle + \mathcal{O}(f_{\text{NL}}^{\text{loc}2}), \\ \langle \zeta^3 \rangle &= \frac{9}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc}} (\langle g^4 \rangle - \langle g^2 \rangle^2) + \mathcal{O}(f_{\text{NL}}^{\text{loc}3}) \simeq \frac{18}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc}} \langle g^2 \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

ただし Wick の定理  $\langle g^4 \rangle = 3 \langle g^2 \rangle^2$  を使った。これらより、最低次で、

$$f_{\text{NL}}^{\text{loc}} \simeq \frac{5}{18} \frac{\langle \zeta^3 \rangle}{\langle \zeta^2 \rangle^2} = \frac{5}{6} \frac{1}{N_f} \sim \frac{1}{72}. \quad (4.2.20)$$

ここで上で述べた理由より  $\langle N_f \rangle \sim 60$  とした。

比較のために、通常の  $\delta N$  形式では非線形性パラメータどう計算されるかも見ておこう。 $\delta N$  形式で、曲率ゆらぎをインフラトン場について 2 次まで展開すれば、

$$\zeta(\mathbf{x}) = \delta N(\mathbf{x}) \simeq \frac{\partial N}{\partial \phi} \delta \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2} \delta \phi^2(\mathbf{x}). \quad (4.2.21)$$

インフラトンはサブホライズンでほぼ自由場だと思えるので、 $\delta \phi$  はほとんどガウスゆらぎである。従って  $g(\mathbf{x}) = N' \delta \phi(\mathbf{x})$  だと思おう。このとき、式 (4.2.18) と比べて、

$$\frac{3}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = \frac{1}{2} \frac{N''}{(N')^2}. \quad (4.2.22)$$

雑音なしの運動方程式は、

$$H \frac{d\phi}{dN} = -2M_p^2 H', \quad (4.2.23)$$

であるので、積分すれば、

$$N = \frac{1}{2M_p^2\alpha} \int_{\phi}^{\phi_f} (H_0 - \alpha\phi') d\phi', \quad N' \simeq -\frac{H_0}{2M_p^2\alpha}, \quad N'' = \frac{1}{2M_p^2}. \quad (4.2.24)$$

従って非線形性パラメータは、

$$f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = \frac{5}{6} \times \frac{2M_p^2\alpha^2}{H_0^2} = \frac{5}{6}\epsilon_H, \quad (4.2.25)$$

となる。これは一見ストカスティック形式の結果 (4.2.20) とは異なる。しかし実はこれらは無矛盾であることを示そう。スローロールパラメータの定義  $\epsilon_H = 2M_p^2(H'/H)^2$  とスローロール運動方程式  $\dot{\phi} + 2M_p^2 H' = 0$  より、

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (4.2.26)$$

である。これは次のように変形できて、

$$H dt = -\frac{1}{\epsilon_H} \frac{dH}{H}. \quad (4.2.27)$$

スローロールパラメータの時間依存性が無視できるとすれば、両辺積分して、

$$\int_{t_i}^{t_f} H dt = \frac{1}{\epsilon_H} \log\left(\frac{H_i}{H_f}\right). \quad (4.2.28)$$

左辺は e-foldings の定義そのものである。一方右辺で、スローロールインフレーションにおいて  $\log(H_f/H_i)$  は 1 のオーダーであると思われるので、従って e-foldings  $N$  とスローロールパラメータの逆数  $\epsilon_H^{-1}$  は同じオーダーの大きさであることがわかる。よって、ストカスティック形式での結果と通常の  $\delta N$  形式の結果は無矛盾である。

### 4.3 一般の場合への拡張

前節では単一場スローロールインフレーションの場合について、曲率ゆらぎのパワースペクトルと非線形性パラメータを解析的に計算した。しかしより一般の場合には数値計算は免れない。ここではそのためのアルゴリズムを説明しよう。まず単一場の場合、

1. インフラトン場  $\phi$  に対し、仮の初期値  $\phi_i$  を選ぶ。
2. 選んだ仮の初期値  $\phi_i$  からインフレーションを始め、完全な運動方程式、

$$\begin{cases} H \frac{d\phi}{dN}(N) = \pi(N) + \frac{H^2}{2\pi} \xi(N), \\ H \frac{d\pi}{dN}(N) = -3H\pi(N) - \frac{dV}{d\phi}, \end{cases} \quad (4.3.1)$$



を数値的に解いて、インフレーション終了値  $\phi_f$  (例えばスローロールパラメータが 1 になる場所) に達するまでにかかる時間  $N$  を求める。数値計算のステップ幅を  $\Delta N$  として、雑音項  $\xi(N)$  は期待値 0、分散  $\Delta N$  のガウス分布乱数に置き換える。高度な数値計算法については付録 B で述べている。雑音項があるのでインフレーション終了までにかかる時間  $N$  は、計算を行う毎に違う結果を得ることになる。従ってこの計算を複数回繰り返せば、 $N$  の平均  $\langle N \rangle$  や分散  $\langle \delta N^2 \rangle$ 、あるいは  $\langle \delta N^3 \rangle$  等々の量を得ることができる。

3. 次に 1. に戻り仮の初期値  $\phi_i$  を変えて 2. を実行することで、異なる  $\langle N \rangle$  に対する  $\langle \delta N^2 \rangle$  や  $\langle \delta N^3 \rangle$  等を得る。こうして 1.2. を繰り返せば  $\langle \delta N^2 \rangle$  や  $\langle \delta N^3 \rangle$  が  $\langle N \rangle$  の関数として求まる。
4. 最後に  $\langle \delta N^2 \rangle$  を  $\langle N \rangle$  で微分すれば、曲率ゆらぎのパワースペクトルを求めることができる。

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left. \frac{d\langle \delta N^2 \rangle}{d\langle N \rangle} \right|_{\langle N \rangle = \ln k_f - \ln k}. \quad (4.3.2)$$

また、曲率ゆらぎがほぼガウス分布であるなら、局所型非線形性パラメータ  $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$  は、

$$f_{\text{NL}}^{\text{loc}} \simeq \left. \frac{\langle \delta N^3 \rangle}{\langle \delta N^2 \rangle^2} \right|_{\langle N \rangle \sim 60}, \quad (4.3.3)$$

と求められる。もし曲率ゆらぎがガウス分布から大きくずれるなら、以下の連立方程式を  $f_{\text{NL}}^{\text{loc}}$  と  $\langle g^2 \rangle$  について解く必要がある。

$$\begin{cases} \langle \zeta^2 \rangle = \langle g^2 \rangle + \frac{18}{25} f_{\text{NL}}^{\text{loc}2} \langle g^2 \rangle^2, \\ \langle \zeta^3 \rangle = \frac{18}{5} f_{\text{NL}}^{\text{loc}} \langle g^2 \rangle^2 + \frac{216}{125} f_{\text{NL}}^{\text{loc}3} \langle g^2 \rangle^3. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

複数場インフレーションへの拡張も基本的な概念は同じである。しかし複数場の場合、アルゴリズム 1. で仮の初期値  $\phi_i$  をどこにとるかが非自明になる。なぜなら場の配位空間が多次元になっているので、雑音がある場合の運動方程式の解 (これを標本路と呼ぶ) は一意に定まらず、雑音のない運動方程式の解 (古典解と呼ぶ) とは一致しないからである。そこで、複数場の場合には、以下のように拡張したアルゴリズムを提唱しよう。

1. 始めにインフレーションの固定開始点を選ぶ。この点はインフレーションが少なくとも 60 e-foldings ほど続く程度に、ポテンシャルの高い位置に選ばなければならない。
2. この固定開始点からインフレーションを始め、大量の標本路を作っておく。確率解析の仮定から、各標本路は同じ統計的重みを持つと思われる。

3. 各標本路に対し、仮の初期値をその標本路上にとることで、上述したアルゴリズムから  $\langle N \rangle$  と  $\langle \delta N^2 \rangle$  の関係性が得られる。すなわち、ある標本路を持ってきたとき、その標本路上のある点から計算を開始して、 $\langle N \rangle$  と  $\langle \delta N^2 \rangle$  を求め、またその標本路上の別の点から計算を開始して、 $\langle N \rangle$  と  $\langle \delta N^2 \rangle$  を求め、… ということを繰り返せばよい。これをすべての標本路について行うことで、各標本路に対して  $\langle N \rangle$  についての  $\langle \delta N^2 \rangle$  の関数形  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  を得る。
4. 真の  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  は 3. で求めた  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  の平均であるとする。各標本路は同じ統計的重みであるので、真の  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  を  $\langle \delta N^2 \rangle_{\text{exact}} (\langle N \rangle)$ 、標本路  $i$  に対する  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  を  $\langle \delta N^2 \rangle_i (\langle N \rangle)$  と書けば、

$$\langle \delta N^2 \rangle_{\text{exact}} (\langle N \rangle) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \langle \delta N^2 \rangle_i (\langle N \rangle), \quad (4.3.5)$$

となる。ただし  $\mathcal{N}$  は生成した標本路の数である。パワースペクトルはこれを用いて、

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left. \frac{d \langle \delta N^2 \rangle_{\text{exact}}}{d \langle N \rangle} \right|_{\langle N \rangle = \ln k_f - \ln k}, \quad (4.3.6)$$

となる。

アルゴリズムの物理的意味を解説していこう。まずすべての標本路は 1. で選んだ固定開始点から始められている。これは我々の観測可能宇宙は 60 e-foldings 程度前には同じホライズン内にいるので、これより前ではすべて同じ発展を経験してきていることになる。すなわち、ここで生成した標本路はすべて、我々の観測可能宇宙内のどこかで実現された経路、だと解釈できる。

次に真の  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  を各標本路に対する  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  の平均だとみなした理由である。各標本路に対する  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  についてもう少し詳しく考えてみよう。例えば、ある標本路に対して  $\langle N \rangle = 30$  のときの  $\langle \delta N^2 \rangle$  が何を意味するか。ここでのアルゴリズムによれば、その標本路上に仮の初期値  $\phi_i$  を選んで運動方程式を繰り返し解いたとき、かかった e-foldings の平均が  $\langle N \rangle = 30$  で分散が  $\langle \delta N^2 \rangle$  ということである。このとき運動方程式を繰り返し解いて得た経路は、すべて  $\phi_i$  から始まっているので、これらはおよそ 30 e-foldings 前には同じホライズン内にあったと考えられる。すなわち、ここで平均や分散を求めたときのブラケットは、この標本路を実現した空間点  $\mathbf{x}$  からインフレーション終了時に半径  $e^{30} H_f^{-1}$  の球面内の空間での平均を意味していることになる。これは非常に重要な点である。なぜなら  $e^{30} H_f^{-1}$  は我々の観測可能宇宙のインフレーション終了時の大きさ  $e^{60} H_f^{-1}$  に比べ遥かに小さいからである。本当であれば、我々の宇宙で観測されるパワースペクトルを計算したいなら、半径  $e^{60} H_f^{-1}$  内全体で平均をとらなければならない

い。そこでまた別の標本路に対して  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle = 30)$  を求めてみるとどうなるだろう。今度は  $\mathbf{x}$  とは別の、しかし我々の宇宙内のある空間点  $\mathbf{y}$  周りで平均をとった分散である。このようにいくつもの標本路の周りで  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle = 30)$  を求めて、半径  $e^{60} H_f^{-1}$  の球面内を埋め尽くし、最後に  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle = 30)$  の平均をとれば、それが  $e^{60} H_f^{-1}$  内で平均をとった  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle = 30)$  に一致するだろう。これが、4. で真の  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  を、各標本路に対する  $\langle \delta N^2 \rangle (\langle N \rangle)$  の平均だとみなした理由である。

実際には半径  $e^{30} H_f^{-1}$  の球で半径  $e^{60} H_f^{-1}$  の球を埋めるには、

$$\frac{\frac{4\pi}{3}(e^{60} H_f^{-1})^3}{\frac{4\pi}{3}(e^{30} H_f^{-1})^3} \sim 10^{39} \text{本}, \quad (4.3.7)$$

の標本路が必要になってきて非現実的であるが、無作為に抽出した標本路ならばこれよりずっと少ない数で、真の分散を再現できるだろう (図 4.2 も参照)。

ここでの議論は抽象的で少しわかりにくいので、次章で実際にハイブリッドインフレーションに対しストカスティック- $\delta N$  のアルゴリズムを適用してパワースペクトルを求めながら、このアルゴリズムの理解を深めよう。

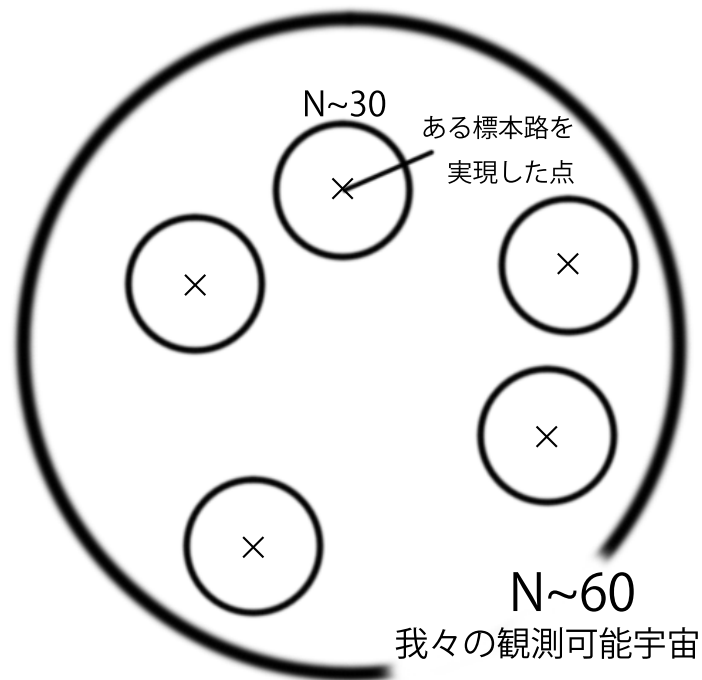


図 4.2. 標本路について平均をとることのイメージ図。固定開始点は、そこからおよそ 60 e-foldings インフレーションが続くように選ぶ。従って固定開始点から計算された標本路は、60 e-foldings より前では同じホライズン内にあり、開始点に達してから徐々にホライズンを出始めた空間点たちを表す。すなわちこれら標本路は、我々の観測可能宇宙内のどこかで実現された場の経路だとみなせる。一方これらのうち、ある特定の標本路上のある点から繰り返し計算を行ってみて、かかった e-foldings の平均が  $N \sim 30$  程度であったならば、それはこの標本路から  $e^{30}/a_f H_f$  共動距離離れた空間内のインフレーションのみを語る。従って観測可能宇宙全体の物理を得たいなら、固定開始点から計算されたあらゆる標本路についての結果を足し上げて均さなければならない。

## 第 5 章

# ハイブリッドインフレーション

ハイブリッドインフレーションは Linde によって提唱 [23] されてから、宇宙論研究者の間で強い興味を集め続けてきた。そのシンプルなポテンシャル形は単にインフレーションの現象論としての奥深さも持っているし、またその超対称性理論への埋め込みも盛んに研究されており [27–30]、素粒子理論への示唆にも富んでいる。谷相でのスペクトラルインデックスが観測と合わず、単純なハイブリッドインフレーションは棄却されたが、ポテンシャルに  $\log$  補正を入れたり、滝相でスローロールインフレーションを行ったりするモデルは観測と無矛盾である。本論文では、観測と整合性を合わせて現実的なハイブリッドインフレーションモデルを作ることよりも、単純なポテンシャル形でかつタキオン不安定性という難解な側面を持つハイブリッドインフレーションを、ストカスティック- $\delta N$  計算の良い演習として利用することを目的とする。

### 5.1 雑音の大きさ

まず始めに雑音の大きさについて議論しておこう。複数場インフレーションにおいて、種類  $i$  のスカラーに対する Langevin 方程式は、式 (4.3.1)、

$$\begin{cases} H \frac{d\phi_i}{dN}(N) = \pi_i(N) + \frac{H^2}{2\pi} \xi_i(N), \\ H \frac{d\pi_i}{dN}(N) = -3H\pi_i(N) - \frac{dV}{d\phi_i}, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

であったが、ここで雑音項の係数  $H^2/2\pi$  は、第 3 章での議論より、 $\phi_i$  のパワースペクトル  $\mathcal{P}_{\phi_i}$  から来ていて、 $H\mathcal{P}_{\phi_i}^{1/2}(t, k_c)$ ,  $k_c = \epsilon aH$  と表されるのであった。単一場スローロールインフレーションであれば、インフラトンサブホライズンではほぼ零質量自由場とみなせるので  $\mathcal{P}_{\phi}^{1/2} \simeq H/2\pi$  の近似がとても良かったが、複数場の場合、スローロールインフレーションにおいても、質量の無視できないスカラーが数種類存在することができ

る。事実、滝場  $\psi$  は臨界点  $\phi_c$  より前では  $m_\psi^2 \sim H^2$  の大きな質量を持っているし、臨界点以降では  $-m_\psi^2 \sim H^2$  の、やはり無視できない大きさのタキオン質量を持っている。このような場合  $\mathcal{P}_\psi^{1/2} \simeq H/2\pi$  の近似は悪く、パワースペクトルを得るには実際にモード関数の方程式を解かなければならない。ゆらぎのないスカラー場の運動方程式は、

$$\ddot{\phi}_{0i} + 3H\dot{\phi}_{0i} - a^{-1}\nabla^2\phi_{0i} + V_i = 0, \quad (5.1.2)$$

であったので、その線形ゆらぎの方程式は、

$$\ddot{\phi}_{\mathbf{k}i} + 3H\dot{\phi}_{\mathbf{k}i} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \phi_{\mathbf{k}i} + V_{ij}\phi_{\mathbf{k}j} = 0, \quad (5.1.3)$$

だ\*1。ゆらぎを線形としたのは、十分サブホライズンでは Bunch-Davies の仮定より自由場だとみなせるからである。ここで  $H$  や  $V$  は背景場  $\phi_{0i}$  の関数である。ストカスティック効果を考えない場合、背景場のダイナミクスは一意に決まるので、モード関数の方程式 (5.1.3) から (解析的には無理でも)  $\phi_{\mathbf{k}i}$  の一意な解を求めることができる。しかしストカスティック形式では背景場は考えているホライズン領域での IR 成分  $\phi_{\text{IR},i}$  であり、 $H$  や  $V$  自身も確率過程となる。従って場のパワースペクトル  $\mathcal{P}_{\phi_i}$  をあらかじめ計算しておくことは不可能で、正しい取り扱いは、IR の方程式、

$$\begin{cases} H(\phi_{\text{IR}}, \pi_{\text{IR}}) \frac{d\phi_{\text{IR},i}}{dN}(N) = \pi_{\text{IR},i}(N) + H(\phi_{\text{IR}}, \pi_{\text{IR}}) \mathcal{P}_{\phi_i}^{1/2}(N) \xi_i(N), \\ H(\phi_{\text{IR}}, \pi_{\text{IR}}) \frac{d\pi_{\text{IR},i}}{dN}(N) = -3H(\phi_{\text{IR}}, \pi_{\text{IR}}) \pi_{\text{IR},i}(N) - \frac{\partial V(\phi_{\text{IR}})}{\partial \phi_{\text{IR},i}}, \end{cases} \quad (5.1.4)$$

を解きながら、その解から得られた  $H, V$  を用いてモード関数の方程式 (5.1.3) を解き、再び IR の方程式 (5.1.4) に戻って雑音項の大きさ  $\mathcal{P}_{\phi_i}(N)$  は時刻  $N$  に  $k = \epsilon a H$  となる波数  $\mathbf{k}$  に対しての  $\frac{k^3}{2\pi^2} |\phi_k|^2$  として与える、ということを逐次行わなければならない。これは IR の計算ステップが 1 つ進むたびに新たな波数  $\mathbf{k}$  に対してモード関数を解かなければならないので、計算量が膨大になり、実質的に行えない。

そこでモード関数を定数質量場のときの解 (2.3.23)、

$$\phi_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H \tau^{3/2} H_\nu^{(1)}(-k\tau), \quad (5.1.5)$$

で近似してしまおう。時刻  $N$  での雑音の大きさは、その瞬間に  $k = \epsilon a H$  となって IR に加わるモードの大きさであるので、 $\tau = -1/aH$  として、

$$\mathcal{P}_{\phi_i}(N) = \frac{H^2}{8\pi} \epsilon^3 |H_{\nu_i}^{(1)}(\epsilon)|^2, \quad (5.1.6)$$

\*1 あるいは共形時間  $\tau$  で書き直せば、式 (2.3.9) になる。

を雑音項の係数とすればよい。ただし  $\nu_i$  は、時刻  $N$  での  $H(\phi_{\text{IR}}, \pi_{\text{IR}})$  と  $V_{ii} = \partial^2 V(\phi_{\text{IR}}) / \partial \phi_{\text{IR}, i}^2$  を用いて、

$$\nu_i^2 = \frac{9}{4} - \frac{V_{ii}}{H^2}, \quad (5.1.7)$$

である。すなわち、時刻  $N$  に  $k = \epsilon a H$  となる波数  $k$  のモード関数  $\phi_k$  を、時刻  $N$  での  $V_{ii}$  を定数質量  $m_{\phi_i}^2$  とする解で置き換えたということである。

実際には  $\phi_i$  の実効質量  $V_{ii}$  は時間に依存するが、十分サブホライズンでは式 (5.1.3) 中で結局  $k^2$  項が質量項より勝るので、 $k = \epsilon a H$  となる時刻までなら (すなわちあまりスーパーホライズンになる前では) 真の解と大きなずれはない。またここでは異なる種類の場の結合による混合  $V_{ij}$ ,  $i \neq j$  の効果は無視した。混合がある場合、時刻  $N$  の  $V_{ij}$  に対し、それを対角化する行列  $P$  を持ってくれば、

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = P^{-1} V_{ij} P, \quad (5.1.8)$$

$P_{ij}^{-1} \phi_{kj}$  は混合のない場となる。従って元の場  $\phi_{\mathbf{k}i}$  の相関は、

$$\langle \phi_{\mathbf{k}i}^\dagger \phi_{\mathbf{k}j} \rangle = \langle (P_{il} P_{lm}^{-1} \phi_{\mathbf{k}m})^\dagger (P_{jn} P_{np}^{-1} \phi_{\mathbf{k}p}) \rangle = P_{jl} \langle (P^{-1} \phi_{\mathbf{k}})_l^\dagger (P^{-1} \mathbf{k})_l \rangle P_{li}^\dagger, \quad (5.1.9)$$

となり、 $\phi_{\mathbf{k}i}$  のパワースペクトルは、

$$\mathcal{P}_{\phi_i} = \sum_l P_{il} \left( \frac{H^2}{8\pi} \epsilon^3 |H_{\nu_l}^{(1)}(\epsilon)|^2 \right) P_{li}^\dagger, \quad (5.1.10)$$

である。ただし右辺で  $i$  について和はとらない。雑音  $\xi_i$  も  $i \neq j$  でゼロでない相関を持つようになる。

$$\begin{aligned} & \langle \xi_i(N, \mathbf{x}) \xi_j(N', \mathbf{x}') \rangle \\ &= \frac{\sum_l P_{il} \left( \frac{H^2}{8\pi} \epsilon^3 |H_{\nu_l}^{(1)}(\epsilon)|^2 \right) P_{lj}^\dagger}{\mathcal{P}_{\phi_i}^{1/2} \mathcal{P}_{\phi_j}^{1/2}} \delta(N - N') \theta(1 - k_c r). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

$k_c = \epsilon a H$ ,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  で、 $\mathcal{P}_{\phi_i}$  は式 (5.1.10) で与えられたものである。しかし、今回考えるパラメータのハイブリッドインフレーションでは、 $\phi$  と  $\psi$  の実効質量が大きくなるので、すでにほぼ質量固有状態になっており、混合  $V_{ij}$ ,  $i \neq j$  の効果は無視できる。

## 5.2 ダイナミクス

本論文で計算に使用する模型パラメータは、ポテンシャル形、

$$V = \Lambda^4 \left[ \left( 1 - \frac{\psi^2}{M^2} \right)^2 + \frac{\phi^2}{\mu^2} + 2 \frac{\phi^2 \psi^2}{\phi_c^2 M^2} \right], \quad (5.2.1)$$

に対し、

$$\begin{aligned}\mu/M_p &= 200, \\ M/M_p &= 0.11, \\ \phi_c/M_p &= 0.1, \\ \Lambda/M_p &= 5 \times 10^{-5},\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

である。 $\phi_c$  は臨界点、 $M$  は滝場  $\psi$  の最終的な真空期待値であるので、小場インフレーションの理念より  $\phi_c, M \ll M_p$  がよい。また超対称模型に埋め込むと  $\phi_c \simeq M$  が要請される [27–30]。 $\mu$  は臨界点以降の e-foldings の長さを決めるパラメータでここでは臨界点以降  $N \sim 30$  程度かかる  $\mu$  を選んでいる。最後に  $\Lambda$  であるが、谷相での  $\psi \simeq 0$  近似の曲率ゆらぎ (2.4.53) の  $\phi_c$  での値は、現在のパラメータで、

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{1}{12\pi^2 M_p^6} \frac{V_0^3}{m_\phi^4 \phi_c^2} \simeq \frac{1}{12\pi^2 M_p^6} \frac{\Lambda^{12}}{(2\Lambda^4/\mu^2)^2 \phi_c^2} \simeq 3.4 \times 10^8 \frac{\Lambda^4}{M_p^4},\tag{5.2.3}$$

となるので、これが  $\mathcal{P}_\zeta$  の観測値  $2.215 \times 10^{-9}$  にだいたい合うように決めている\*2。

このパラメータのもとで、初期値  $(\phi, \psi) = (0.1001, 10^{-10})$  から始めた標本路の1つを図 5.1 に示した。ただし、 $N$  はインフレーション開始時をゼロとしており、時間は右に向かって進む。滝場  $\psi$  は初めゼロに向かって転がるが、 $\phi$  が小さくなるにつれて  $\psi$  の実効質量が小さくなり揺動が大きくなるので、揺動のある解 (stochastic) の  $|\psi|$  は揺動のない解 (classical) より大きくなっている。インフラトン場  $\phi$  は、しばらく揺動の効果はほとんど見られないが、インフレーション最後に、揺動によってより急激に成長した  $\psi$  の生む実効質量によって急激に転がり落ちている。ちなみに揺動のない解ではインフレーションが終了するまで 62.4 e-foldings かかるので、揺動があると 10 e-foldings 以上早くインフレーションが終わることになる。また、臨界点  $\phi_c = 0.1M_p$  を通過するのは 20 e-foldings 程度経過した時であることがわかる。

スローロールパラメータの時間変化も見てみよう。2 スカラー場インフレーションには以下の5つのスローロールパラメータがある。

$$\begin{aligned}\epsilon_\phi &= \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V_\phi}{V} \right)^2, & \epsilon_\psi &= \frac{M_p^2}{2} \left( \frac{V_\psi}{V} \right)^2 \\ \eta_{\phi\phi} &= M_p^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V}, & \eta_{\phi\psi} &= M_p^2 \frac{V_{\phi\psi}}{V}, & \eta_{\psi\psi} &= M_p^2 \frac{V_{\psi\psi}}{V}.\end{aligned}\tag{5.2.4}$$

図 5.1 に示した標本路に対する、これらスローロールパラメータの時間変化を図 5.2 に示した。左図より  $|\eta_{\phi\psi}|$  か  $|\eta_{\psi\psi}|$  のどちらかが 1 を超えてスローロール条件が破れることが

\*2 本論文では観測と整合する模型を作ることが目的ではないし、結局スペクトラルインデックスが観測と合わないので、本当は  $\mathcal{P}_\zeta \sim 2 \times 10^{-9}$  とする理由はない。



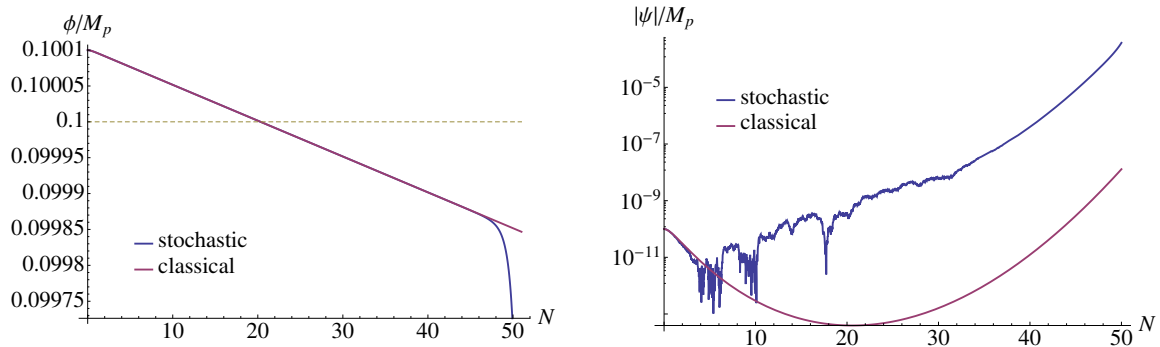


図 5.1. 標本路の 1 つ (stochastic) と雑音項のない運動方程式の解 (classical) のプロット。  $N$  は初期値をゼロとしており、時間は右に向かって進む。

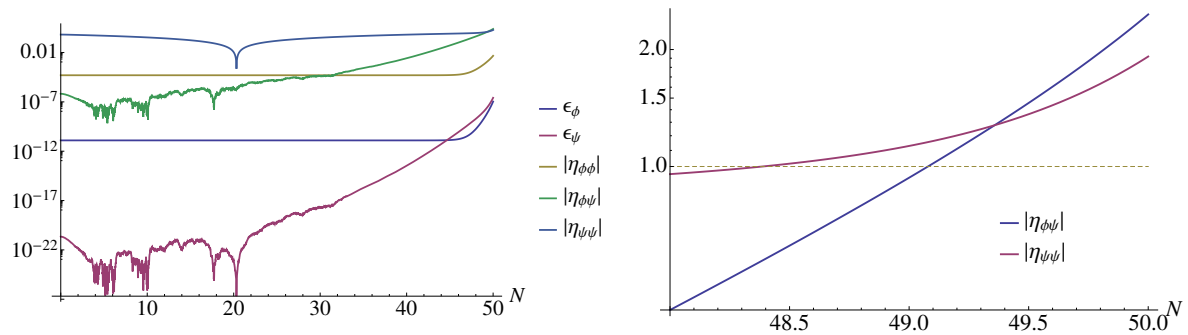


図 5.2. 5 つのスローロールパラメータの時間変化 (左図) とインフレーション終了付近の拡大 (右図)。最初に  $|\eta_{\psi\psi}|$  が 1 を超えてスローロール条件が破れることがわかる。

わかるので、右図にインフレーション終了付近の  $|\eta_{\phi\psi}|$  と  $|\eta_{\psi\psi}|$  を拡大プロットした。これにより  $|\eta_{\psi\psi}|$  が初めに 1 を超えることがわかる。

複数場インフレーションの場合、スローロール条件が破れる点を  $\delta N$  形式の終了点とするのは良くない。なぜなら  $\delta N$  の終了面は等密度切断を選ばなければならないが、スローロール条件が破れる点が等密度面に乗っている保証はないからである。実際図 5.3 には  $\eta_{\psi\psi}$  の等高線 (破線) とポテンシャルの等高線 (実線。数値は運動項を除いた Hubble パラメータ  $H$  に対し、 $H/M_p \times 10^9$ ) を示したが、これらは全く一致していないことがわかる。赤線は標本路の 1 つであるが、これを見ると  $\eta_{\psi\psi} < -1$  となつてから (運動項を除いて)  $H/M_p = 1.4433758 \times 10^{-9}$  となることがわかるので、本章ではインフレーションの終了条件として、運動項も含め  $H/M_p = 1.4433758 \times 10^{-9}$  を選んでいる。運動項を含めれば終了面は正しく等密度切断である。

ここまでの図には 1 つの標本路しかプロットしてこなかったもので、上の議論は選んだ標本路に依るのではないかという疑問が出るかもしれない。しかし揺動のある解も上の議論を崩すほど大きく異なった経路をとることはほぼありえないことが確かめられている。

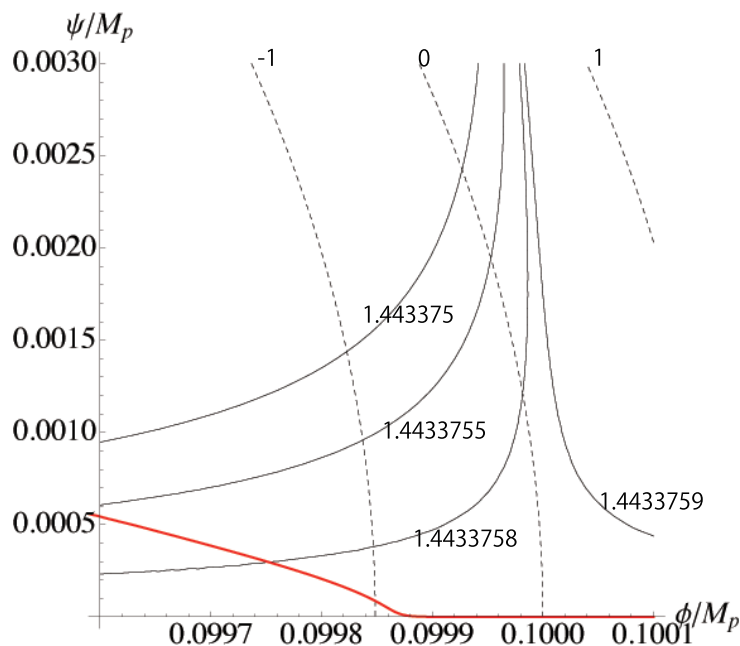


図 5.3. スローロール条件の破れる点と等ポテンシャル面の不一致。破線は  $\eta_{\psi\psi}$  についての等高線であり、実線はポテンシャルについての等高線である。数値は、運動項を除いた Hubble パラメータ  $H$  に対し  $H/M_p \times 10^9$  を記している。スローロール条件は  $|\eta_{\psi\psi}|$  が 1 を超えると破れるが、この点は等ポテンシャル面には全く一致していないので、 $\delta N$  形式の終了点とできない。赤線は標本路の 1 つである。

### 5.3 通常の $\delta N$ 形式

ストカスティック- $\delta N$  形式で計算する前に通常の  $\delta N$  形式の適用範囲について少し述べよう。通常の  $\delta N$  形式において曲率ゆらぎは、 $\delta N$  の開始面でインフラトン場を  $\delta\phi \simeq \mathcal{P}_\phi^{1/2}$  程度ずらした時、インフレーション終了までにかかる e-foldings のずれとして求められた。スカラーが 2 つある場合は、スカラーのゆらぎの間に相関がないとして (実効質量による混合は小さいのであった)、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\zeta(k) &= N_\phi^2 \mathcal{P}_\phi + N_\psi^2 \mathcal{P}_\psi \\ &= \left[ \left( N(\phi + \mathcal{P}_\phi^{1/2}, \psi) - N(\phi, \psi) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( N(\phi, \psi + \mathcal{P}_\psi^{1/2}) - N(\phi, \psi) \right)^2 \right] \Big|_{k=aH}, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

となる。このとき、前提としてゆらぎ  $\mathcal{P}_\phi^{1/2}, \mathcal{P}_\psi^{1/2}$  は  $\phi$  や  $\psi$  より十分小さくなければならない。そうでなければゆらぎとしての取り扱いが成り立たない。図 5.1 を見ると

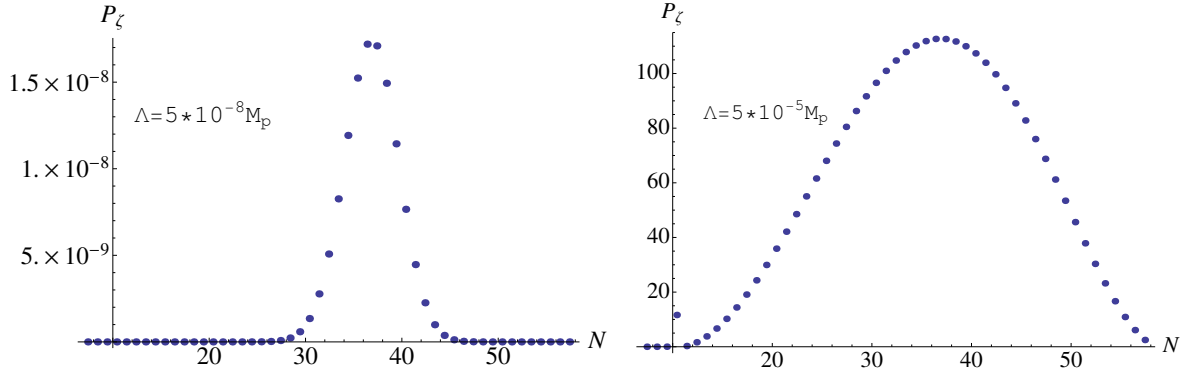


図 5.4. 通常の  $\delta N$  形式を用いて計算した曲率ゆらぎのパワースペクトル  $\mathcal{P}_\zeta$ . 時間  $N$  は今度はインフレーション終了をゼロとした定義であることに注意。臨界点  $N \sim 42$  より少しあとにピークが立っている。右図は曲率ゆらぎが 1 を大きく超えているので、ゆらぎの処方破綻している。

$\mathcal{P}_\phi^{1/2} \ll \phi$  ではあるが、明らかに  $\mathcal{P}_\psi^{1/2} > |\psi|$  である。実際ざっくりとした見積もり  $\mathcal{P}_\psi \sim H/2\pi \simeq \Lambda^2/(2\pi M_p) = 4 \times 10^{-10} M_p$  に対し、揺動のない解の  $|\psi|$  は  $N \sim 20$  では  $10^{-13} M_p$  より小さくなっている。

仮にエネルギースケールがもっと低くければこの問題は解決されるので、まずは  $\Lambda = 5 \times 10^{-8} M_p$  で計算してみよう。図 5.4 の左にその結果をのせた。今度の  $N$  はゆらぎのない解がインフレーション終了までにかかる e-foldings を表しているの、インフレーション終了時刻が  $N = 0$  である。従って逆にインフレーション開始時刻は  $N = 62.4$  であるし、そこから 20 e-foldings ほどかかる臨界点は  $N \simeq 42$  である。図を見ると、臨界点をやや過ぎたあたりに曲率ゆらぎのピークが立っている。 $\mathcal{P}_\zeta \propto V/\epsilon$  であるから、ポテンシャルの傾き  $\epsilon$  が小さいほど曲率ゆらぎは大きくなるので、 $\epsilon_\psi = 0$  である臨界点付近にピークが立つのは直感に合う。ピークが臨界点ちょうどではなく、やや過ぎた所に立つのは、ちょうど臨界点では場はインフラトン  $\phi$  方向に主に動いていて、曲率ゆらぎに寄与するのは  $\epsilon_\psi$  ではなく  $\epsilon_\phi$  だからである。従ってこの結果におかしな点はない。

一方  $\Lambda = 5 \times 10^{-5} M_p$  の計算結果が図 5.4 の右である。今度は曲率ゆらぎのパワースペクトルが 1 を大きく超えてしまっている。これが  $\delta\psi^2 \gg \psi^2$  となってしまっていることの意味で、広い波数領域でゆらぎが 1 を超えているこの計算は正しくゆらぎが定義できていないことを意味している。

ストカスティック形式ではゆらぎまでも含めた IR 成分を背景として扱うので  $\delta\psi = \psi_{\text{IR}} - \sqrt{\langle \psi_{\text{IR}}^2 \rangle} < \sqrt{\langle \psi_{\text{IR}}^2 \rangle}$  をかならず満たす。従って曲率ゆらぎがゆらぎとして扱える領域 (インフレーション終了時点での  $\langle \delta N^2 \rangle$  が 1 を超えない) であれば、 $\Delta N > 1$  ほどの広い波数領域でパワースペクトルが 1 を超えるということは起こらないし、逆にパワースペクトルが 1 を大きく超えるなら、その模型が生む曲率ゆらぎはもはやゆらぎとして扱えないということが言える。事実ストカスティック- $\delta N$  の処方では  $\Lambda = 5 \times 10^{-5} M_p$  のとき

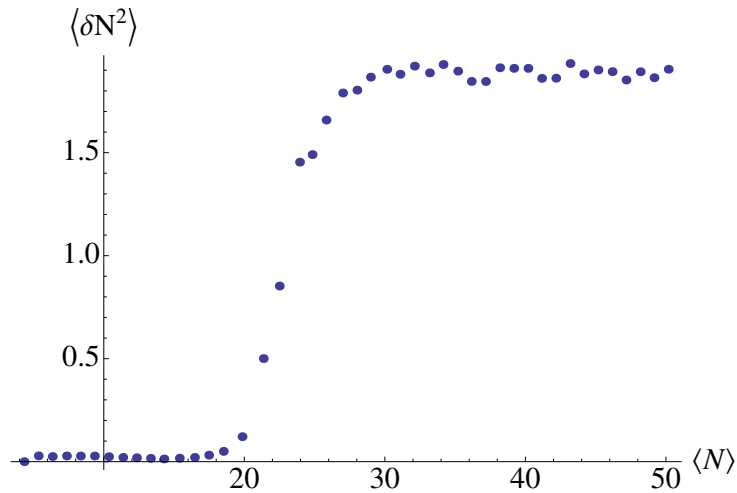


図 5.5. ある標本路に対する e-foldings の平均と分散のプロット。各点はそれぞれ、標本路上のある点から数値計算を繰り返したとき、平均してかかる e-foldings  $\langle N \rangle$  と分散  $\langle \delta N^2 \rangle$  を表す。これの微分がパワースペクトルである。統計誤差を除いて単調増加であるので確かにパワースペクトルは常に正である。

でもパワースペクトルは 1 を超えないことを次節で見よう。

## 5.4 ストカスティック- $\delta N$

いよいよハイブリッドインフレーションにストカスティック- $\delta N$  を適用しよう。前章与えた処方によれば、ある標本路上のさまざまな点から数値計算を開始し、各点ごとにかかった e-foldings の平均と分散をプロットして、最後に標本路について平均をとればよいのであった。例えばある標本路に対し、e-foldings の平均と分散をプロットしたものを図 5.5 に与えた。プロット上で 1 つの点は標本路上の 1 つの点に対応し、その点から数値計算を繰り返し行ったとき、平均してかかる e-foldings  $\langle N \rangle$  と分散  $\langle \delta N^2 \rangle$  を表している。プロット上で右上の方の点は、ポテンシャルの比較的高い位置に初期値を取ったデータであり、左下の方の点は、ポテンシャルの低い位置に初期値を取ったデータであるということだ (図 5.6 も参照)。

階段関数のような形をしているが、これの微分がパワースペクトルであったので、パワースペクトルは  $N \sim 24$  程度にピークを持つデルタ関数のような形になる。パワースペクトルが常に正になるには分散のプロットは  $\langle N \rangle$  について単調増加でなければならないが、 $\langle N \rangle > 30$  は統計誤差でゆらいでいるだけなので、問題はない。

しかし、また別の標本路に対して同じプロットを行うと図 5.7 のようになる。右図は  $N \sim 24$  あたりの拡大図であるが、今度は明らかに単調増加ではなくなくなって病的であ

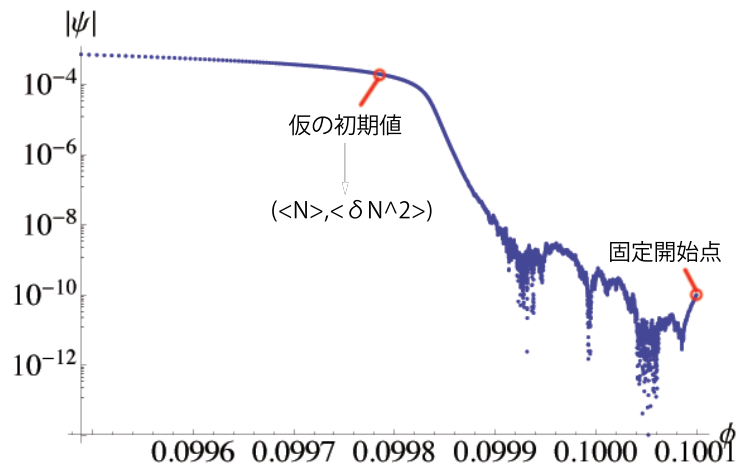


図 5.6. 固定開始点  $(\phi, \psi) = (0.1001M_p, 10^{-10}M_p)$  から開始された標本路。この標本路上の適当な点を仮の初期値としてここから繰り返し計算を行うと、この点に対し、かかった e-foldings の平均  $\langle N \rangle$  や分散  $\langle \delta N^2 \rangle$  が得られる。これが図 5.5 のようなプロットの 1 つの点に対応する。

る。実はこれが、前章述べたようにさまざまな標本路についての平均をとって真の分散を求めなければならない理由である。インフレーション中はゆらぎが生成される一方だから必ず  $\langle \delta N^2 \rangle$  は  $\langle N \rangle$  について単調増加になるが、それはあくまで常に同じ体積中で平均をとっている場合のみである。ここで行った計算は、例えば  $\langle N \rangle = 40$  の点はこの標本路を実現した空間点周り半径  $e^{40}H_f^{-1}$  の球内で平均をとった量であるが、 $\langle N \rangle = 20$  の点は半径  $e^{20}H_f^{-1}$  の球内でしか平均をとっていない。そのため必ずしも分散が単調増加するとは言えないのである。

別の理解として、ポテンシャルの言葉で言えば、インフレーション終了までかかる e-foldings の平均  $\langle N \rangle$  に関する等高線と、分散  $\langle \delta N^2 \rangle$  に関する等高線が必ずしも一致しないということを意味しているとも言える。そのため標本路が通った経路によっては分散は単調でなくなり得る。

いずれにせよ、さまざまな標本路に対して平均をとればこの問題は解消されなければならない。図 5.8 には 45 本の標本路について平均をとったプロットをのせた。45 本の標本路はすべて同じ初期値  $(\phi, \psi) = (0.1001, 10^{-10})$  から始めている。この点は  $\langle N \rangle \sim 50$  に対応しているので、これらの標本路はインフレーション終了時に半径  $e^{50}H_f^{-1}$  の球内にある空間点のどこかで実現されたと解釈できる。従ってこれら標本路についてさらに平均をとった  $\langle \delta N^2 \rangle$  は常に半径  $e^{50}/a_f H_f$  の同じ共動座標球内で平均をとった  $\langle \delta N^2 \rangle$  となる。そのため確かに  $\langle \delta N^2 \rangle$  は  $\langle N \rangle$  について単調となっており、パワースペクトルは常に正である。

このプロットを微分して得たパワースペクトルは図 5.9 のようになる。注目すべきは、前節通常の  $\delta N$  形式で計算したパワースペクトルは 1 を大きく超えていたが、ストカス

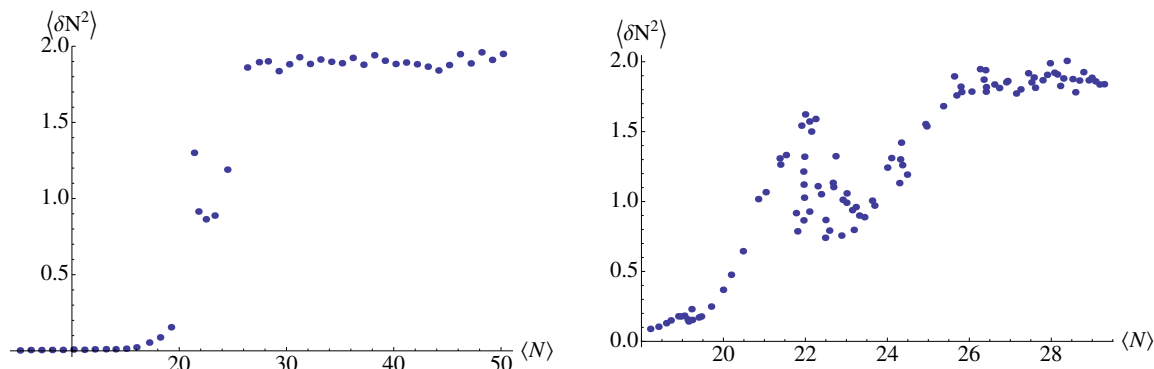


図 5.7. 別のある標本路に対する  $\langle N \rangle$  対  $\langle \delta N^2 \rangle$  プロット。右図は  $N \sim 24$  あたりの拡大。この付近で明らかに単調増加ではなくなっており、負のパワースペクトルを与える。これはこの特別な標本路の周辺でしか平均をとってないことに起因している。

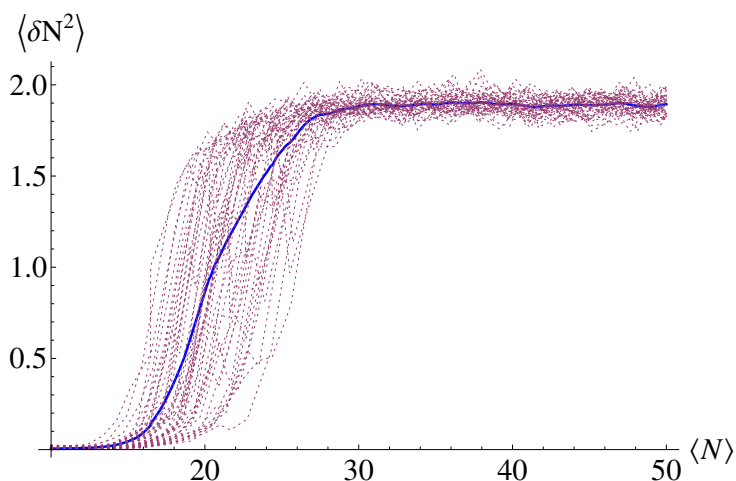


図 5.8. 破線は 45 本の標本路それぞれに対しての  $\langle N \rangle$  対  $\langle \delta N^2 \rangle$  のプロットであり、実線はその平均。さまざまな標本路に対して平均をとれば確かに分散  $\langle \delta N^2 \rangle$  は  $\langle N \rangle$  について単調である。

ティック- $\delta N$  で得られた結果は 1 より小さいという点だ！ これはこの模型に対して、通常の単純な  $\delta N$  形式は適用できず、ストカスティック- $\delta N$  形式を用いなければならないことを明確に示している。これが本論文の主要な結果である。

今回のパラメータでは最終的に  $\langle \delta N^2 \rangle$  が 1 を超えてしまっているため、曲率ゆらぎはゆらぎとして破綻してしまっている。しかしこれは  $\Lambda$  をほんの少し下げれば解消されるので、大きな問題ではない。ストカスティック形式では分散を微分してパワースペクトルを求めているので、最終的に分散が 1 を超えないような模型、あるいはパラメータであれば広い波数領域でパワースペクトルが 1 を超えるということはないことが、自明にわかる。従って  $\langle \delta N^2 \rangle < 1$  であれば、運動項が正準であるすべてのインフレーション模型に対し、ストカスティック- $\delta N$  形式は正しいパワースペクトルを与える。

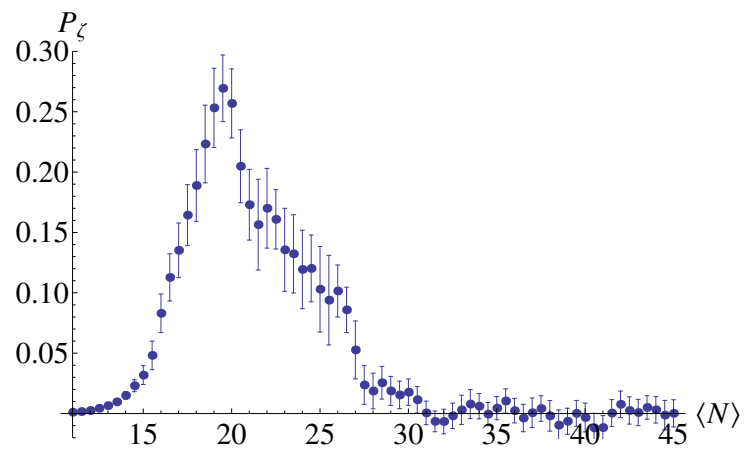


図 5.9. 図 5.8 で示した分散を微分して得られた曲率ゆらぎのパワースペクトル  $P_\zeta$ . 誤差は標準誤差 = 標準偏差/ $\sqrt{\text{sample 数}} (= 45)$  で与えている。通常の  $\delta N$  ではパワースペクトルが 1 を大きく超えたが、ストカスティック- $\delta N$  の結果は 1 を超えていない。これはストカスティック- $\delta N$  形式の成功を明確に示している。





## 第 6 章

### 結

本論文ではストカスティック形式を利用した、インフレーションで作られる曲率ゆらぎを計算する新しい手法を提唱した。我々の手法ではインフラトン場のゆらぎについて摂動展開することなく e-foldings のゆらぎが直接計算され、それが  $\delta N$  形式によって曲率ゆらぎに変換される。第 4 章で見たように、Hubble パラメータの変化が小さいような単一場スローロールインフレーションでは、確率解析の数学を応用することで我々の手法を解析的に実行でき、その結果は通常線形摂動理論と無矛盾である。Hubble パラメータの変化が大きい場合でも、単一場スローロールであればいつでも数 e-foldings 程度あれば Hubble パラメータの変化は小さいとできるので、生成された曲率ゆらぎが保存されることから、我々の手法と線形摂動理論は大きなずれを生まない。また第 5 章では、摂動論が破綻するハイブリッドインフレーションの臨界点まわりに対し我々の手法を適用した。ハイブリッドインフレーションでの曲率ゆらぎは長い間さまざまな近似のもとで研究されてきたが、ストカスティック形式では古典ダイナミクスとゆらぎを統合して扱えるので、摂動論が破綻するような場合でも大きな近似を必要とせずそのまま適用できる。実際ハイブリッドインフレーションの臨界点まわりでは、単なる摂動論では不可解な結果が出るのに対し、我々の手法では妥当な結果が出ることを見た。

CMB や大規模構造の観測から大スケールのゆらぎは  $\sim 10^{-5}$  と非常に小さいことがわかっているので、このスケールでは線形摂動論がよい。一方、より小スケールではゆらぎが小さいとは限らない。実際小スケールでゆらぎが大きいと原始ブラックホールや超コンパクトミニハロー等の興味深い天体が生成されることが示唆されているので、これらを正しく扱うためにも非摂動的な我々の手法は重要である。



## 付録 A

# 有限温度場の理論

インフレーション中、あるいはブラックホール周りで量子論を展開しようと思ったときに困るのが、ホライズンという概念である。ホライズンとは一度越えると戻って来られない境界であり、考えている領域 (内と呼ぶ) はホライズンを越えた側 (外と呼ぶ) からの因果を受けない。従ってホライズンの内側しか Hilbert 空間は張れないのだが、しかし量子論的にはホライズン付近で外と内は相互作用するようである。実際ホライズンがあると Hawking 温度が定義され、Hawking 輻射が予言されるが、これはホライズンの外側に負のエネルギーの粒子を落とすことで、内側に輻射を生じさせるものである。インフレーション中のゆらぎの生成 (あるいは粒子生成) も同様で、つまりこれらを正しく扱うには、ホライズンの外の Hilbert 空間も同時に考えなければならない。しかしホライズンの外から情報は得られないので必然的に混合状態を扱うこととなり、これを Hawking 温度の由来と考えることもできる [53]。こうするとインフレーション中の量子論はまさに有限温度中の非平衡量子論と対応し、この分野での技術を使うことが出来そうである。そして実際 3.2 節ではこの分野における手法、Closed Time Path (CTP) 形式を用いることで Langevin 方程式を導いている。

この付録では、まず有限温度中の非平衡量子論、特に CTP 形式について説明し、後に 3.2 節で飛ばした計算の詳細を追う。

### A.1 実時間形式

有限温度場の理論でよく用いられるのが時間を Wick 回転して虚時間を定義し、それを温度と対応させる虚時間形式であるが、これは時間を温度に対応させてしまったので時間発展を扱えず、従って定常状態しか議論できない。非平衡状態を扱うには時間をそのまま使う実時間形式を使わねばならないが、有限温度ゆえ混合状態を扱うことになる。混合状

態は密度演算子 (あるいは密度行列) $\rho$  で指定される。

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)|, \quad \sum_n p_n = 1. \quad (\text{A.1.1})$$

$p_n$  は状態  $|\phi_n(t)\rangle$  を観測する確率であり、Schrödinger 表示をとっている。 $n$  についての和は離散的である必要はなく積分でもよい。この形を見れば明らかなように  $|\phi_n(t)\rangle$  を状態ベクトルと呼ぶなら  $\rho$  は確かに密度行列でありその空間は Hilbert 空間を  $\mathcal{H}$  として  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  である。この結果として場の自由度が 2 倍に増えることになる。この節ではまず実時間形式を扱う CTP 形式を定義し、その後その形式の諸性質を見て行く。

### A.1.1 Closed Time Path 形式

混合状態において任意の演算子  $\mathcal{O}$  の期待値は以下で定義される。

$$\langle \mathcal{O} \rangle (t) = \text{Tr}(\rho(t)\mathcal{O}) = \sum_n p_n \langle \phi_n(t) | \mathcal{O} | \phi_n(t) \rangle. \quad (\text{A.1.2})$$

次に Schrödinger 表示で状態は、 $H$  を Hamiltonian として時間発展方程式、

$$i \frac{\partial |\phi(t)\rangle}{\partial t} = H |\phi(t)\rangle, \quad (\text{A.1.3})$$

を満たすので、密度演算子の定義 (A.1.1) より、 $\rho(t)$  は、

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)], \quad (\text{A.1.4})$$

を満たす。従って密度演算子の時間発展は、 $H$  が時間に陽に依存しないならば、以下の形で表される。

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt}. \quad (\text{A.1.5})$$

より一般には、時間発展演算子、

$$U(t, t') = T \left( e^{-i \int_{t'}^t dt'' H(t'')} \right), \quad (\text{A.1.6})$$

を定義して、

$$\rho(t) = U(t, 0) \rho(0) U^\dagger(t, 0) = U(t, 0) \rho(0) U(0, t), \quad (\text{A.1.7})$$

となる。ただし  $T$  は時間順序演算子である。また、時間発展演算子の重要な性質を挙げておこう。

$$\begin{aligned} U(t, t) &= 1, \\ U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) &= U(t_1, t_3). \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

以上より、演算子  $\mathcal{O}$  の期待値は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle (t) &= \text{Tr}[\rho(t)\mathcal{O}] \\ &= \text{Tr}[U(t, t_i)\rho(t_i)U(t_i, t)\mathcal{O}] \\ &= \text{Tr}[\rho(t_i)U(t_i, t)\mathcal{O}U(t, t_i)] \\ &= \text{Tr}[\rho(t_i)U(t_i, t_f)U(t_f, t)\mathcal{O}U(t, t_i)].\end{aligned}\quad (\text{A.1.9})$$

こうするとあたかも、 $t_i$  から  $t$  まで進み、演算子  $\mathcal{O}$  を挿入して  $t_f$  まで行き、 $t_f$  で折り返して  $t_i$  まで戻ってきた、というように解釈できる。つまり時刻  $t$  で演算子  $\mathcal{O}$  の期待値を求めたければ、任意の開始時刻  $t_i$  と終時刻  $t_f$  (ただし  $t_i < t < t_f$ ) を決めて、時間経路をこの間で往復し、時刻  $t$  に演算子  $\mathcal{O}$  を挿入すればよい。この時間経路の往復が Closed Time Path 形式の名前の所以である。

さて、期待値が理解できたので、それに従って生成汎関数を以下のように定義しよう。ただしここからは Schrödinger 表示から Heisenberg 表示に移る。

$$Z[J_c] = \text{Tr} \left[ \rho T_c \left( e^{i \int_c d^4x J_c(x)\phi(x)} \right) \right]. \quad (\text{A.1.10})$$

ただし時間積分は上述定めたような往復経路  $C$  に沿っており、時間順序演算子は経路  $C$  に従って順序づけるものとする。後はよくやるように完全系を細かく挿入すれば、

$$\begin{aligned}Z[J_c] &= \mathcal{N} \sum_n p_n \int_{\phi(t_i)=\phi_n} \mathcal{D}\phi \Psi^*[\phi_n, t_i] \Psi[\phi_n, t_i] \\ &\quad \times \exp \left[ i \int_c d^4x (\mathcal{L}(x) + J_c(x)\phi(x)) \right].\end{aligned}\quad (\text{A.1.11})$$

$\Psi[\phi_n, t_i]$  は確率汎関数  $\Psi[\phi_n, t_i] = \langle \phi_n | \phi(t_i, \mathbf{x}) \rangle$  である。 $|\phi(t_i, \mathbf{x})\rangle$  は  $\phi(t_i, \mathbf{x})$  の固有状態である。これはいつものように  $t_i \rightarrow -\infty$  とし、 $-i\epsilon$  処方 ( $\phi$  の質量  $m^2$  を  $m^2 - i\epsilon$  に置き換え、最後に  $\epsilon \rightarrow 0$  をとること) を行えば、始状態として真空以外寄与せず、 $\Psi[\phi_n, t_i]$  依存性は落ちる。さらに終時間も  $t_f \rightarrow +\infty$  とし<sup>\*1</sup>、時間経路  $C$  を往路と復路に2分割、往路  $C^+$  上での  $\phi$  を  $\phi^+$ 、復路  $C^-$  上での  $\phi$  を  $\phi^-$  とすれば (これを二重化と呼ぶ)、最終的に、

$$\begin{aligned}Z[J_c] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\phi^- e^{i(S[\phi^+] - S[\phi^-])} \\ &\quad \times \exp \left( i \int d^4x (J_c^+(x)\phi^+(x) - J_c^-(x)\phi^-(x)) \right).\end{aligned}\quad (\text{A.1.12})$$

時間積分は通常通り  $-\infty < t < +\infty$  で行われており、 $\phi^-$  に関する部分はもともと時間を逆向きに積分していたので負号が出ている。

<sup>\*1</sup>  $t_f \rightarrow +\infty$  としなければ二重化した時に  $\Psi[\phi_n, t_f]$  依存性が出てしまう。従って  $t_i$  と同様に  $-i\epsilon$  処方これを落とす。

## A.1.2 伝播関数

二重化によって混合状態の期待値が通常の散乱振幅と同様に計算できることがわかったが、伝播関数を構成するためにいったん二重化の前まで戻ろう。伝播関数は、

$$\begin{aligned} iG_c(t-t') &= \langle T_c(\phi(t)\phi(t')) \rangle \\ &= \theta_c(t-t') \langle \phi(t)\phi(t') \rangle + \theta_c(t-t') \langle \phi(t')\phi(t) \rangle \\ &= (-i)^2 \frac{\delta^2 Z[J_c]}{\delta J_c(t)\delta J_c(t')} \Big|_{J_c=0}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

で定義される。ただし階段関数は、

$$\theta_c(t-t') = \begin{cases} \theta(t-t') & t, t' \in C^+ \\ \theta(t'-t) & t, t' \in C^- \\ 0 & t \in C^+, t' \in C^- \\ 1 & t' \in C^+, t \in C^- \end{cases} \quad (\text{A.1.14})$$

で定義されている。便利なので同様にデルタ関数も定義しよう。

$$\delta_c(t-t') = \frac{d\theta_c(t-t')}{dt} = \begin{cases} \delta(t-t') & t, t' \in C^+ \\ -\delta(t-t') & t, t' \in C^- \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{A.1.15})$$

これは明らかにデルタ関数の定義、

$$\int_c dt' \delta(t-t') f(t') = f(t), \quad (\text{A.1.16})$$

を満たしている。

相互作用は後で摂動的に入れるのでここでは自由場を考えよう。Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (\text{A.1.17})$$

このとき生成汎関数は厳密に積分できて、

$$Z[J_c] = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{i}{2} \int_c dt dt' \int d^3x d^3y J_c(t, \mathbf{x}) G_c(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{y}) J_c(t', \mathbf{y}) \right] \quad (\text{A.1.18})$$

となる。 $G_c$  は Klein-Gordon 演算子の Green 関数になっていて、

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) G_c(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta_c(t-t') \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (\text{A.1.19})$$

あるいは一様 de Sitter 背景であれば、生成汎関数の重みが、

$$e^{i \int_c d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}(x) + J_c(x)\phi(x))} = e^{i \int_c d^4x a^3(t) (\mathcal{L}(x) + J_c(x)\phi(x))}, \quad (\text{A.1.20})$$

となり、部分積分した時に時間微分が  $a^3(t)$  にあたるので、 $G_c$  は次の演算子の Green 関数になる。

$$\begin{aligned} -a^3(t) \left[ \partial_t^2 + 3H\partial_t - \frac{\nabla^2}{a^2(t)} + m^2 \right] G_c(t-t', \mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ = \delta_c(t-t')\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.1.21})$$

特に  $-\partial_t^2 - 3H\partial_t + \frac{\nabla^2}{a^2(t)}$  を d'Alembertian  $\square$  と定義すると、今後の平坦時空の議論で、Klein-Gordon 演算子の前に  $a^3(t)$  をつけ、 $\partial_\mu\partial^\mu$  を  $\square$  に置き換えればよいので便利である。

後はこれを Fourier 変換すれば解けるのだが、後で演算子形式の議論で解くのでここはこれまでにしておいて、二重化の議論に戻ろう。

### A.1.3 行列表示

場を二重化して生成汎関数が散乱理論と同じように書けたのだから、伝播関数も二重化すれば、さらに整合性がとれるだろう。すなわち伝播関数を以下のように4つに分割してみよう。

$$\begin{aligned} iG^{++}(t-t') &= \langle T(\phi(t)\phi(t')) \rangle & t, t' \in C^+ \\ iG^{+-}(t-t') &= \langle \phi(t')\phi(t) \rangle & t \in C^+, t' \in C^- \\ iG^{-+}(t-t') &= \langle \phi(t)\phi(t') \rangle & t \in C^-, t' \in C^+ \\ iG^{--}(t-t') &= \langle \bar{T}(\phi(t)\phi(t')) \rangle & t, t' \in C^- \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

ただし  $\bar{T}$  は時間逆順序演算子である。こうしておけば、場を二重項で表示して、

$$\begin{aligned} \phi^a &= \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{pmatrix}, \\ J^a &= \begin{pmatrix} J^+ \\ J^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

この2次元空間に  $(1, -1)$  の計量を入れれば、生成汎関数は、

$$Z[J_+, J_-] = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J_a(x) G^{ab}(x, y) J_b(y)}, \quad (\text{A.1.24})$$

と簡略的に表せる。この時伝播関数は生成汎関数を使って、

$$iG^{ab}(x, y) = (-i)^2 \frac{\delta Z[J]}{\delta J_a(x) \delta J_b(y)} \Big|_{J=0}, \quad (\text{A.1.25})$$

と表される。

## A.2 影響作用の計算

CTP 形式を用いて、質量項までを取り入れた影響作用 (3.2.14) を求めよう。便利な次の微分演算子、

$$\tilde{\Lambda} = -a^3(t) \left[ \partial_t^2 + 3H\partial_t - \frac{\nabla^2}{a^2(t)} + m^2 \right], \quad (\text{A.2.1})$$

を導入しておけば、質量項までの作用は、

$$S[\phi] = \int d^4x \frac{1}{2} \phi \tilde{\Lambda} \phi, \quad (\text{A.2.2})$$

と簡単に書ける。従って場を IR と UV にわけて  $\phi = \phi_{\text{IR}} + \phi_{\text{UV}}$  とし、さらに + と - に二重化すれば、質量項までの影響汎関数 (3.2.10) は、

$$\begin{aligned} & F[\phi_{\text{IR}} = \varphi; J_{\text{UV}} = 0] \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^{\pm} \exp \left[ i \int d^4x d^4y \left( \frac{1}{2} \phi_{\text{UV}}^a(x) \Lambda_{ab}(x, y) \phi_{\text{UV}}^b(y) + \varphi^a(x) \Lambda_{ab}(x, y) \phi_{\text{UV}}^b(y) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^{\pm} \exp \left[ i \left( \frac{1}{2} \phi_{\text{UV}} \Lambda \phi_{\text{UV}} + \varphi \Lambda \phi_{\text{UV}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

となる。ただし、

$$\Lambda_{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_x & 0 \\ 0 & -\tilde{\Lambda}_x \end{pmatrix} \delta^4(x - y), \quad (\text{A.2.4})$$

であり、3 行目は 2 行目を行列表示で簡略化していることを意味する。 $\Lambda^a_b(x, y)$  中の微分演算子  $\tilde{\Lambda}$  は第 1 引数  $x$  についての微分であることを、 $\tilde{\Lambda}_x$  として表している。前節より、この  $\Lambda^a_b(x, y)$  の逆  $G(x, y)$  が伝播関数であったので、次を得る。

$$i(\Lambda^{-1})^{ab}(x, y) = \begin{pmatrix} \langle T(\phi_{\text{UV}}(x)\phi_{\text{UV}}(y)) \rangle & \langle \phi_{\text{UV}}(y)\phi_{\text{UV}}(x) \rangle \\ \langle \phi_{\text{UV}}(x)\phi_{\text{UV}}(y) \rangle & \langle \bar{T}(\phi_{\text{UV}}(x)\phi_{\text{UV}}(y)) \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.5})$$

従って式 (A.2.3) に  $1 = \Lambda\Lambda^{-1}$  をはさみ、部分積分を行えば、

$$F = \int \mathcal{D}\phi_{\text{UV}}^{\pm} \exp \left[ i \left( \frac{1}{2} \phi_{\text{UV}} \overrightarrow{\Lambda} \Lambda^{-1} \overleftarrow{\Lambda} \phi_{\text{UV}} + \varphi \overrightarrow{\Lambda} \Lambda^{-1} \overleftarrow{\Lambda} \phi_{\text{UV}} \right) \right]. \quad (\text{A.2.6})$$

ただし矢印は微分がかかっている方向を示す\*2。ここで空間引数をきちんと考えてみよう。例えば第 1 項は、

$$\phi_{\text{UV}}(x_1) \overrightarrow{\Lambda}(x_1, x_2) \Lambda^{-1}(x_2, x_3) \overleftarrow{\Lambda}(x_3, x_4) \phi_{\text{UV}}(x_4), \quad (\text{A.2.7})$$

\*2  $\Lambda$  は 2 回微分であるから、部分積分を 2 回行うことになり負号は出ないことに注意しよう。



であるが、 $\Lambda$  は第 1 引数に関する微分であったから、微分は  $\overrightarrow{\Lambda}\Lambda^{-1}\overleftarrow{\Lambda}$  の中で簡潔していることになる！ 従って  $\overrightarrow{\Lambda}\Lambda^{-1}\overleftarrow{\Lambda}$  はもはや単なる数である。よって式 (A.2.6) は普通のガウス積分になったので、 $\varphi$  に依らない定数を規格化因子  $\mathcal{N}$  として出してしまえば、

$$F = \mathcal{N} \exp \left[ -i \frac{1}{2} \varphi \overrightarrow{\Lambda} \Lambda^{-1} \overleftarrow{\Lambda} \varphi \right], \quad (\text{A.2.8})$$

と積分できてしまう。

UV 成分は窓関数  $W(\mathbf{k}, t)$  を用いて、

$$\phi_{\text{UV}}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} W(\mathbf{k}, t) \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{A.2.9})$$

と定義されたことを用いて、Fourier 空間に移行すれば、

$$F = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \varphi_{-\mathbf{k}}(t) \overrightarrow{\Lambda}_{\mathbf{k}}(t) W(\mathbf{k}, t) \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} \langle T(\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t')) \rangle & \langle \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t') \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \rangle \\ \langle \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t') \rangle & \langle \overline{T}(\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t')) \rangle \end{pmatrix} W(\mathbf{q}, t') \overleftarrow{\Lambda}_{\mathbf{q}}(t') \varphi_{-\mathbf{q}}(t') \right]. \quad (\text{A.2.10})$$

$W \rightarrow \theta$  の極限で IR 場  $\varphi$  と  $W$  は直交するので、最低でも 1 回は  $W$  に  $\Lambda$  の時間微分がかからなければゼロになってしまう。従って非零の寄与を生むのは、

$$F = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dt dt' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} a^3(t) \varphi_{-\mathbf{k}}(t) \overrightarrow{P}_t \sigma_3 \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} \langle T(\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t')) \rangle & \langle \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t') \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \rangle \\ \langle \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t') \rangle & \langle \overline{T}(\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t) \hat{\phi}_{\mathbf{q}}(t')) \rangle \end{pmatrix} \sigma_3 \overleftarrow{P}_{t'} a^3(t') \varphi_{-\mathbf{q}}(t') \right], \quad (\text{A.2.11})$$

となる。ただし  $\sigma_3$  は Pauli 行列、

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.12})$$

で、 $P_t$  は次式で定義される微分演算子である。

$$P_t = \left[ \ddot{W}(\mathbf{k}, t) + 3H\dot{W}(\mathbf{k}, t) + 2\dot{W}(\mathbf{k}, t)\partial_t \right]. \quad (\text{A.2.13})$$

後はモード関数の定義、

$$\hat{\phi}_{\mathbf{k}} = \phi_k(t) \hat{a}_{\mathbf{k}} + \phi_k^*(t) \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (\text{A.2.14})$$

を代入すれば、少しの計算の後、影響作用 (3.2.14)、

$$S_{\text{IA}}^{(1)} = \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 x' \varphi_q(x) \text{Re}[\Pi(x, x')] \varphi_q(x') \\ - 2 \int d^4 x d^4 x' \theta(t - t') \varphi_q(x) \text{Im}[\Pi(x, x')] \varphi_c(x'), \\ \Pi(x, x') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a^3(t) [P_t \phi_{\mathbf{k}}(t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a^3(t') [P_{t'} \phi_{\mathbf{k}}^*(t')] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}, \quad (\text{A.2.15})$$

を得る。

## 付録 B

# 確率解析

ストカスティック形式ではインフラトンの運動方程式に統計的乱数が入ってきた。このように確率的に変動する項が入る微分方程式を数学的に扱うのが(連続時間の)確率解析という分野である。第4章では確率解析の技術をストカスティックインフレーションに応用するので、ここではあまり数学的になりすぎない程度に確率解析の理論 [64] を展開していこう。

まず B.1 節は無限確率空間に関するいくつかの定義づけに割り、ついで B.2 節では情報をモデル化し、マルチンゲール等の重要な概念を扱う。B.3 節ではブラウン運動を定義し、実際に第4章で用いる数学的事実を導く。最後に B.4 では伊藤積分を定義することで、物理の分野では比較的直感的に扱われる白色雑音の正しい取扱いを述べる。

## B.1 一般的な確率論

### B.1.1 無限確率空間

確率論は確率空間を定めることから始まる。特に連続時間の確率解析を行うには、後に明らかになるが、無限に多くの結果が起こり得る確率的試行をモデル化しなければならない。このために無限確率空間が必要となる。以降、コインを無限に多くの回数投げる試行を例にとりながら議論を進めていこう。

コインを無限回投げる場合、起こり得る結果の集合、標本空間  $\Omega$  は次のようになる。

$$\Omega = H \text{ と } T \text{ からなる無限列の集合.} \quad (\text{B.1.1})$$

$H$ (head) と  $T$ (tail) はそれぞれコインの表と裏を意味する。 $\Omega$  の元を  $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$  と書くことにする。ただし  $\omega_n$  は  $n$  回目のコイン投げの結果である。さて、もしこれが有限回コインを投げる試行であれば、それぞれの結果に対し、確率を簡単に定義できる。例えばコインを連続して2回投げるのであれば、標本空間は  $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$  であり、

コインが公平であれば、それぞれの起こる確率は  $1/4$  である。しかし、今回標本空間は無限であるので、どの結果も起こる確率がゼロとなってしまう。従って無限確率空間では標本空間の元ではなく部分集合に確率を定義する。以下にその一連の定義を示そう。

定義 B.1.1.1  $\Omega$  を空でない集合とし、 $\mathcal{F}$  を  $\Omega$  の部分集合の集まりとする。 $\mathcal{F}$  が  $\sigma$ -加法族であるとは、次を満たすことを指す。

1. 空集合  $\emptyset$  は  $\mathcal{F}$  に属する。
2. 集合  $A$  が  $\mathcal{F}$  に属するならば、その補集合  $A^c$  もまた  $\mathcal{F}$  に属する。
3. 集合列  $A_1, A_2, \dots$  が  $\mathcal{F}$  に属するならば、それらの和集合  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  もまた  $\mathcal{F}$  に属する。

この3つのみで  $\sigma$ -加法族は集合に対するあらゆる操作で閉じていることが示せる。例えば集合  $A$  と  $B$  がある  $\sigma$ -加法族に属しているならば、集合列  $A, B, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots$  を考えることで、1. と 3. から  $A \cup B$  もこの  $\sigma$ -加法族に属さなければならない。2 個以上の和集合に対しても同様である。また、 $A_1, A_2, \dots$  がある  $\sigma$ -加法族に属している時、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c, \quad (\text{B.1.2})$$

であることから、2. と 3. より  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  もまたこの  $\sigma$ -加法族に属していることが言える。空集合  $\emptyset$  を使えば有限の積集合についても同様に  $\sigma$ -加法族が閉じていることが言えよう。最後に  $\Omega = \emptyset^c$  より  $\Omega$  自身常に  $\mathcal{F}$  に属する。

定義 B.1.1.2  $\Omega$  を空でない集合とし、 $\mathcal{F}$  を  $\Omega$  の部分集合からなる  $\sigma$ -加法族であるとする。確率測度  $\mathbb{P}$  は、全ての集合  $A \in \mathcal{F}$  に対して、 $[0, 1]$  の中の値を対応させる関数である。この値を  $A$  の確率と呼び、 $\mathbb{P}(A)$  と記す。 $\mathbb{P}$  は、次を満たさなければならない。

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
2. (加算加法性)  $A_1, A_2, \dots$  が  $\mathcal{F}$  に属する互いに素な集合列であるならば、

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n), \quad (\text{B.1.3})$$

である。

3つの組  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  は確率空間と呼ばれる。

これらがはたして確率の直感と矛盾していないかは重要である。例えば、 $\mathbb{P}(\emptyset)$  はゼロであってほしい。これは集合列  $\emptyset, \emptyset, \dots$  に 2. を適用すれば  $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$  となり、従って  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  でなければならないことから確かめられる。また有限加法性も  $\sigma$ -加法

族の時と同じ様な手法で導ける。つまり、 $A_1, A_2, \dots, A_N$  が互いに素ならば、集合列  $A_1, A_2, \dots, A_N, \emptyset, \emptyset, \dots$  に対し 2. を用いて、

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n), \quad (\text{B.1.4})$$

が言える。特に 2 個の場合、

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B), \quad (\text{B.1.5})$$

はおなじみであろう。さらにここで  $B = A^c$  とすれば、1. より、

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad (\text{B.1.6})$$

を得る。こうして確率測度が直感的に満たすべき性質が、無限加算加法性 2. から導かれることがわかった。

$\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}$  と確率測度  $\mathbb{P}$  の定義から、 $\mathcal{F}$  に属する集合すべてに確率を矛盾なく定義できることがわかる。つまり確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  は、標本空間  $\Omega$  と、確率が定義できる集合族  $\mathcal{F}$ 、そしてそれらに定義された確率測度  $\mathbb{P}$  でなっていることになる。では実際に無限回のコイン投げの例に対し、確率測度を構成してみよう。

**例題 B.1.1.1 (無限回の独立なコイン投げの空間)** コインを無限に多くの回数投げるとして、標本空間  $\Omega$  は起こり得るすべての結果の集合であるとする。各コイン投げにおける表の確率は  $p > 0$ 、裏の確率は  $q = 1 - p > 0$  であるとし、各回のコイン投げはすべて互いに独立であるとする。この確率的試行に対応する確率測度を構成したい。

まず、 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  および  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  と定義する。この 2 つの集合は  $\sigma$ -加法族を成すことは明らかであり、これを  $\mathcal{F}_0$  と書くことにする。

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}. \quad (\text{B.1.7})$$

次に、以下の 2 つの集合、

$$\begin{aligned} A_H &= H \text{ で始まるすべての列からなる集合} = \{\omega \mid \omega_1 = H\}, \\ A_T &= T \text{ で始まるすべての列からなる集合} = \{\omega \mid \omega_1 = T\}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

に対する確率を、 $\mathbb{P}(A_H) = p$ ,  $\mathbb{P}(A_T) = q$  と定義する。 $A_H^c = A_T$  より、以上の 4 つの集合は  $\sigma$ -加法族を成す。これを  $\mathcal{F}_1$  と書こう。

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_H, A_T\}. \quad (\text{B.1.9})$$

さらに、以下の 4 つの集合、

$$\begin{aligned}
A_{HH} &= HH \text{ で始まるすべての列からなる集合} \\
&= \{\omega \mid \omega_1 = H, \omega_2 = H\}, \\
A_{HT} &= HT \text{ で始まるすべての列からなる集合} \\
&= \{\omega \mid \omega_1 = H, \omega_2 = T\}, \\
A_{TH} &= TH \text{ で始まるすべての列からなる集合} \\
&= \{\omega \mid \omega_1 = T, \omega_2 = H\}, \\
A_{TT} &= TT \text{ で始まるすべての列からなる集合} \\
&= \{\omega \mid \omega_1 = T, \omega_2 = T\},
\end{aligned} \tag{B.1.10}$$

に対する確率測度を、

$$\mathbb{P}(A_{HH}) = p^2, \quad \mathbb{P}(A_{HT}) = pq, \quad \mathbb{P}(A_{TH}) = qp, \quad \mathbb{P}(A_{TT}) = q^2, \tag{B.1.11}$$

で定義する。式 (B.1.6) より、各補集合  $A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c$  の確率が決定される。また式 (B.1.5) より、和集合  $A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT}$  の確率もまた決定される。後残りの 2 通りの、2 つの集合による和集合  $A_{HH} \cup A_{HT} = A_H$  と  $A_{TH} \cup A_{TT} = A_T$  の確率は既に定義されている。3 つの和集合については、例えば、

$$A_{HH} \cup A_{HT} \cup A_{TH} = A_{TT}^c, \tag{B.1.12}$$

と既に確率が定義された集合の補集合で表されるので、これらの確率が決定されていることは上で述べた。これで 16 個の集合の確率を決めたことになり、これらの集合は  $\sigma$ -加法族を成す。これを  $\mathcal{F}_2$  と書こう。

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \emptyset, \Omega, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c, A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT} \right\} \tag{B.1.13}$$

このような手順を続けることにより、有限回のコイン投げの結果を使って表すことのできるすべての集合の確率を定義することができる。この集合族に、 $\sigma$ -加法族となるために必要な他のすべての集合を加えることによって作られる  $\sigma$ -加法族を  $\mathcal{F}$  と書こう。 $\mathcal{F}$  の中で、有限回のコイン投げで表されるすべての集合は、上記のように確率が定義されているし、有限回のコイン投げでは表されない集合のうち、 $\mathcal{F}$  に含まれるものは、有限回のコイン投げで表される集合の和集合で表される。 $\sigma$ -加法族になるために必要な集合というのは、そういう意味だからである。従って新たに加えられた、有限回のコイン投げで表されない集合たちに対しても確率が定義される。例えば、すべてのコイン投げの結果が表という列  $HHHH \dots$  に対する確率を考えてみよう。これは、

$$HHHH \dots = A_H \cap A_{HH} \cap A_{HHH} \cap \dots, \tag{B.1.14}$$

と表される。一方、

$$\mathbb{P}(A_H) = p, \quad \mathbb{P}(A_{HH}) = p^2, \quad \mathbb{P}(A_{HHH}) = p^3, \dots \quad (\text{B.1.15})$$

であり、これらの確率はゼロに収束するので、

$$\mathbb{P}(HHHH\dots) = 0, \quad (\text{B.1.16})$$

でなければならない。あるいは列  $HTHTHT\dots$  なども確率ゼロとなる。同様の議論により  $\Omega$  に属する各元に対し、それだけを要素に持つ集合の確率はゼロである。

また確率が定まることがわかっているにもかかわらず、その値が容易に算出できない集合もある。例えば、次を満たす列  $\omega = \omega_1\omega_2\dots$  全体からなる集合  $A$  を考えよう。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n(\omega_1 \dots \omega_n)}{n} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.1.17})$$

ここで、 $H_n(\omega_1 \dots \omega_n)$  は最初の  $n$  回のコイン投げの中の  $H$  の回数を表す。つまり、 $A$  は表が出る比率の長期的平均が  $1/2$  であるような、表と裏の列全体からなる集合である。 $A$  が  $\mathcal{F}$  に属することを見るために、正の整数  $m$  と  $n$  を固定して次の集合を定義する。

$$S_{n,m} = \left\{ \omega \left| \left| \frac{H_n(\omega_1 \dots \omega_n)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{m} \right. \right\}. \quad (\text{B.1.18})$$

これは最初の  $n$  回のコイン投げで決定されるので  $\mathcal{F}_n$  に属する。極限の定義より、コイン投げの列  $\omega = \omega_1\omega_2\dots$  が式 (B.1.17) を満たすための必要十分条件は、任意の正の整数  $m$  に対して、ある正の整数  $N$  が存在して、すべての  $n \geq N$  について  $\omega \in S_{n,m}$  が成り立つことである。言い換えると、

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} S_{n,m}, \quad (\text{B.1.19})$$

である。集合  $A$  は  $\mathcal{F}$  に属する集合列の和集合や積集合の形で表せることから、それ自身  $\mathcal{F}$  に属することがわかる。このことは、 $\mathbb{P}(A)$  の値をどうやって計算すればよいのかを直接的には教えてくれないが、ともかく  $\mathbb{P}(A)$  の値が決定されていることは確かである。実は結局、大数の強法則の帰結として、もし  $p = q = 1/2$  ならば  $\mathbb{P}(A) = 1$  であり、 $p \neq 1/2$  であれば  $\mathbb{P}(A) = 0$  であることが言える。

この無限回のコイン投げの例における、個々の列はすべて確率ゼロであるという考察は、無限確率空間における 1 つのパラドックスをもたらす。例えば、 $p, q > 0$  のコインに対し、表しか出ないということは起こり得ないだろう。少なくとも 1 回は裏が出るのは確実であると言いたい。しかし、表しか出ないという列は標本空間の中に存在し、そして他のどんな列より起こりにくいということはないのである (すべての単一の列は確率ゼロで

ある)。このことからあるあいまいな専門用語が作り出された。すなわち、ほとんど確実に少なくとも 1 回は裏が出る、と表現するのである。ある事象がほとんど確実であるとは、標本空間のすべての元を含んでいなかったとしても確率が 1 であることを意味する。逆にその事象に属さない結果の集合は、確率ゼロである。

定義 B.1.1.3  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とする。集合  $A \in \mathcal{F}$  が  $\mathbb{P}(A) = 1$  を満たすとき、ほとんど確実に事象  $A$  が起こると言う。

もう 1 つ重要な例題を見ておこう。

例題 B.1.1.2 ( $[0, 1]$  上の一様 (Lebesgue) 測度) 単位区間  $[0, 1]$  から無作為に実数を選ぶことに対する数学モデルを、その確率が区間上に一様に分布するように組み立てよう。閉区間  $[a, b]$  の確率を次式で定義する。

$$\mathbb{P}[a, b] = b - a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1, \quad (\text{B.1.20})$$

つまり実数を選ぶとき、選ばれた実数が  $a$  と  $b$  の間にある確率が  $b - a$  ということだ\*1。  $b = a$  ならば (すなわち選ばれた実数がぴったり  $a$  に一致するのは)、確率ゼロであるということである。1 点は確率ゼロであるから、开区間  $(a, b)$  の確率は閉区間  $[a, b]$  の確率と同じである。

$$\mathbb{P}(a, b) = b - a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1. \quad (\text{B.1.21})$$

$[0, 1]$  の部分集合で確率が定まるものは他にもある。例えば、集合  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  は区間ではないが、式 (B.1.5) より確率  $2/3$  であることがわかる。

例題 B.1.1.1 と同様に閉区間の全体から始めて、 $\sigma$ -加法族にするために必要な他のすべての集合を加えてできる  $\sigma$ -加法族を  $\mathcal{F}$  と呼ぼう。开区間は例えば次のように、

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right], \quad (\text{B.1.22})$$

と閉区間列の和集合として表せるので、 $\mathcal{F}$  はすべての开区間を含む。また、前段落で出てきた  $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  のような集合も含まれている。このような  $\mathcal{F}$  を  $[0, 1]$  の Borel  $\sigma$ -加法族と言い、 $\mathcal{B}[0, 1]$  と記す。Borel  $\sigma$ -加法族に属する集合は Borel 集合と呼ばれる。

## B.1.2 確率変数と期待値

確率変数  $X$  は  $\Omega$  から  $\mathbb{R}$  への写像である。その定義は以下で与えられる。

\*1  $[0, 1]$  上のこの特別な確率測度は、Lebesgue 測度と呼ばれる。 $\mathbb{R}$  の部分集合の Lebesgue 測度は、その集合の“長さ”である。



定義 B.1.2.1  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とする。確率変数とは、 $\Omega$  上で定義された実数値関数  $X$  で、 $\mathbb{R}$  のすべての Borel 集合  $B$  に対して、 $\Omega$  の部分集合、

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}, \quad (\text{B.1.23})$$

が  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}$  に属するという性質を持つものを言う。

$\{X \in B\}$  のイメージを簡単に説明するために、無限回のコイン投げを確率空間、 $X$  をコイン投げの結果に依存した何らかの数値としよう。Borel 集合  $B$  として区間  $[0, 1]$  を選べば、 $\{X \in B\}$  は  $X$  が区間  $[0, 1]$  の中にくるようなコイン投げの結果たちの集合である。 $\{X \in B\}$  が  $\mathcal{F}$  に属すればすなわち、 $X$  が  $[0, 1]$  の中にある確率が定義されるということである。

次に  $X$  に対する“期待値”を定義しよう。 $\Omega$  が有限集合の場合は簡単で、それは次式で定義される\*2。

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega). \quad (\text{B.1.24})$$

一方無限確率空間に対しては、これを積分で定義しなければならない。

定義 B.1.2.2  $X$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上の確率変数とする。 $X$  の期待値は次で定義される。

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega)d\mathbb{P}(\omega). \quad (\text{B.1.25})$$

ただし、右辺は Lebesgue 積分である。

Riemann 積分  $\int_a^b f(x)dx$  がいわゆる  $x$  軸を細かく分割して定義されるのに対し、Lebesgue 積分は  $y$  軸を分割して定義される(なぜなら確率空間において  $x$  軸に対応するのは  $\Omega$  であり、その自然な分割方法というものはないからである)。Lebesgue 積分は次のような手順で定義される。

しばらくの間、すべての  $\omega \in \Omega$  に対し  $0 \leq X(\omega) < \infty$  と仮定し、 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots$  に対し  $\Pi = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$  とおく。各小区間  $[y_k, y_{k+1}]$  に対し、

$$A_k = \{\omega \in \Omega | y_k \leq X(\omega) < y_{k+1}\}, \quad (\text{B.1.26})$$

とおく。そして Lebesgue 下積和を次で定義する。

$$\text{LS}_{\Pi}^-(X) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mathbb{P}(A_k). \quad (\text{B.1.27})$$

\*2 本論文の他の文脈では期待値はブラケット  $\langle X \rangle$  を用いて表しているが、次節に出てくる条件付き期待値  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  をブラケット記法で表すと  $\langle X|\mathcal{G} \rangle$  と、内積のように見えてしまうため、この付録中では期待値は  $\mathbb{E}$  を用いて表す。

$\mathbb{P}(A_k)$  は言ってみれば、 $X$  の値がだいたい  $y_k$  である確率である。分割点  $y_k$  間の距離の最大値  $\|\Pi\|$  がゼロに近づくにつれて、この下積和は収束する (あるいは  $\infty$  になる)。この極限値を Lebesgue 積分  $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  と定義する。

今、すべての  $\omega \in \Omega$  に対して  $0 \leq X(\omega) < \infty$  を仮定しているが、もしこの条件を満たさない  $\omega$  の集合が確率ゼロならば、上で定義した積分に何の影響もない。また  $\mathbb{P}\{\omega | X(\omega) \leq 0\} = 1$  であるが、 $\mathbb{P}\{\omega | X(\omega) = \infty\} > 0$  である場合には、 $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}\omega = \infty$  と定義する。

最後に、正の値も負の値も両方撮り得る確率変数  $X$  について考える必要がある。そのような確率変数に対し、 $X$  の正の部と負の部を次で定義する。

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}. \quad (\text{B.1.28})$$

これらに対し、 $\int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  と  $\int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  はどちらも上記の手順により定義されており、すくなくとも一方が  $\infty$  でない場合、次を定義できる。

$$\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (\text{B.1.29})$$

もし  $\int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  と  $\int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  が共に有限であれば、 $X$  は可積分であると言い、このとき  $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  も有限である。もし  $\int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \infty$  で  $\int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  が有限ならば、 $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \infty$  である。逆に  $\int_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  が有限で、 $\int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \infty$  ならば  $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = -\infty$  である。もし、 $\inf_{\Omega} X^+(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \infty$  かつ  $\int_{\Omega} X^-(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \infty$  ならば、式 (B.1.28) 中で “ $\infty - \infty$ ” という状況が起こっていることになり、 $\int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$  は不定である。

## B.2 情報と条件付け

### B.2.1 情報と $\sigma$ -加法族

前節では、無限回のコイン投げを例に、無限確率空間を構築した。この節ではさらに、情報を数学的にモデル化する。再びコイン投げを例にとろう。コイン投げに付随して、次のようなランダムウォーク  $M_n$  を考える。

$$X_j = \begin{cases} 1 & \omega_j = H \\ -1 & \omega_j = T \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

として、

$$M_n = \sum_{j=1}^n X_j. \quad (\text{B.2.2})$$

このランダムウォークの  $M_n$  の値を“予想”したいとする。もちろん全くコインを投げていない状態であれば、何も予言できないが、コインを投げるにつれて  $M_n$  のおおよその値はわかってくる (例えばしばらく続けて  $H$  が出たなら  $M_n > 0$  である確率が高くなるだろう)。これはコイン投げの結果が時間とともにわかることによって、情報を得ていることを意味する。そして、測度論的確率論において情報は、 $\sigma$ -加法族を用いてモデル化される。

やはりコイン投げを例に取れば、例えば最初のコイン投げで判明するのは、真の事象  $\omega$  は  $A_H$  と  $A_T$  のどちらに属するか、である。ここで  $A_H$  と  $A_T$  は前節で定義したように、それぞれ最初のコイン投げの結果が表であるすべての列の集合と、裏であるすべての列の集合である。

$$A_H = \{\omega | \omega_1 = H\}, \quad A_T = \{\omega | \omega_1 = T\}. \quad (\text{B.2.3})$$

また何も情報を得なくても、空集合  $\emptyset$  と全体集合  $\Omega$  についてはすでに判明している。すなわち  $\omega$  は  $\emptyset$  には属さないし、 $\Omega$  には属している。従って、コインを1回投げた時点で、真の  $\omega$  が属しているか否かが判明している集合は以下の4つである。

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_H, A_T\}. \quad (\text{B.2.4})$$

そしてこれらは  $\sigma$ -加法族を成している。すなわち1回のコイン投げが終了した時点で得られている情報は、 $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}_1$  を用い、 $\mathcal{F}_1$  に属するすべての集合はそれに真の  $\omega$  が属しているか否かが判明している、という形で表現される。同様にコインを2回投げれば、 $\sigma$ -加法族、

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \Omega, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c, \\ A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT} \end{array} \right\}, \quad (\text{B.2.5})$$

が判明することになる。言うまでもなく、 $\mathcal{F}_1$  に属する集合はすべて  $\mathcal{F}_2$  にも属しており、この時点で真の  $\omega$  が属するかどうか判明している。

またコイン投げについて何も知らされていないければ、判明する集合は  $\emptyset$  と  $\Omega$  だけである。

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}. \quad (\text{B.2.6})$$

この  $\mathcal{F}_0$  を自明な  $\sigma$ -加法族と呼ぶ。

時刻が進むにつれてコイン投げに関するより多くの情報を得ることになるが、それはこれら  $\sigma$ -加法族を用いて次のように表現できる。すなわち  $n < m$  ならば、 $\mathcal{F}_m$  は、 $\mathcal{F}_n$  に属する全ての集合とそれ以上のものを要素として含む。このような  $\sigma$ -加法族をフィルトレーションと呼ぶ。

定義 B.2.1.1  $\Omega$  を空でない集合とする。  $T$  を正の定数とし、各  $t \in [0, T]$  に対して  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{F}(t)$  があると仮定する。さらに、もし  $s \leq t$  ならば  $\mathcal{F}(s)$  に属する全ての集合は  $\mathcal{F}(t)$

にも属すると仮定する。このとき、 $\sigma$ -加法族の集まり  $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$  をフィルトレーションと呼ぶ。

さて、コイン投げの例に戻れば、予言したいのはコイン投げの結果そのものではなく、ランダムウォークの位置  $M_n$  であった。事実、無限回のコイン投げの結果は有限回のコイン投げの結果から予想することはできないのに対し、ある時刻でのランダムウォークの位置は、その時刻までのコイン投げの結果がすべて判明していれば、一意に決定できる。このように、ある程度情報を得れば、真の  $\omega$  がわからなくても確率変数  $X$  の値はわかるということは往々にしてあるし、そのような場合であれば現実的に扱うことができそうである。この時、情報  $\mathcal{G}$  によって確率変数  $X$  の値が決定できることを、 $X$  は  $\mathcal{G}$ -可測であるという。

**定義 B.2.1.2**  $X$  を、空でない標本空間  $\Omega$  上で定義された確率変数とする。 $\mathcal{G}$  を、 $\Omega$  の部分集合からなる  $\sigma$ -加法族とする。 $\mathbb{R}$  のすべての Borel 集合  $B$  に対して、集合  $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$  が  $\mathcal{G}$  にも属するとき、 $X$  は  $\mathcal{G}$ -可測であると言う。また、すべての  $B$  に対する  $\{X \in B\}$  の集まりは  $\sigma$ -加法族をなすが、これを  $X$  によって生成される  $\sigma$ -加法族と言い、 $\sigma(X)$  と記す。

特に時刻に依る確率変数  $X(t)$  がその時刻  $t$  までに得られる情報  $\mathcal{F}(t)$  で可測であるならば、確率変数  $X(t)$  は常に決定し続けられることになる。

**定義 B.2.1.3**  $\Omega$  を空でない標本空間とし、フィルトレーション  $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$  を備えているとする。 $X(t)$  を、 $t \in [0, T]$  で添字付けられた確率変数の集まりとする。各  $t$  に対して確率変数  $X(t)$  が  $\mathcal{F}(t)$ -可測であるとき、この確率変数の集まりを適合確率過程と言う。

ランダムウォーク  $M_n$  は (離散時間模型ではあるが) 適合確率過程である。

## B.2.2 一般の条件付き期待値

前項で  $\mathcal{G}$ -可測の概念を与えたが、全く逆の概念として、情報  $\mathcal{G}$  と確率変数  $X$  が何の関係を持たないという状況も考えられる。この場合  $\mathcal{G}$  と  $X$  は独立であると言う。独立の正確な定義は以下で与えられる。

**定義 B.2.2.1**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とし、 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族の列とする。任意に固定された正の整数  $n$  に対し、 $n$  個の  $\sigma$ -加法族  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$  が独立であるとは、次が成り立つことを言う。

$$\begin{aligned} & \text{任意の } A_1 \in \mathcal{G}_1, A_2 \in \mathcal{G}_2, \dots, A_n \in \mathcal{G}_n \text{ に対し、} \\ & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n). \end{aligned} \tag{B.2.7}$$

$X_1, X_2, X_3, \dots$  を  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上の確率変数列とする。 $n$  個の確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が独立であるとは、 $\sigma$ -加法族  $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots, \sigma(X_n)$  が独立である場合を言う。

確率変数  $X$  が、 $\mathcal{G}$ -可測ではないが  $\mathcal{G}$  と独立でもない、という場合もよくあるだろう。つまり、情報  $\mathcal{G}$  によって  $X$  の評価がある程度よくなるという場合である。このような、 $\mathcal{G}$  という情報を得ているときの  $X$  の推定を  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  と記し、これを  $\mathcal{G}$  を所与とする  $X$  の条件付き期待値と呼ぶ。

定義 B.2.2.2  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間、 $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族とし、 $X$  を非負または可積分な確率変数とする。 $\mathcal{G}$  を所与とする  $X$  の条件付き期待値を  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  と記し、次の 2 つを満たす確率変数として定義する。

1. 可測性  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  は  $\mathcal{G}$ -可測。
2. 部分平均

$$\text{すべての } A \in \mathcal{G} \text{ に対し、} \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \quad (\text{B.2.8})$$

$\mathcal{G}$  が他のある確率変数  $W$  から生成される  $\sigma$ -加法族の場合、一般的に  $\mathbb{E}[X|\sigma(W)]$  の代わりに  $\mathbb{E}[X|W]$  と書く。

条件付き期待値  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  は  $\mathcal{G}$  という情報を得るまで確定しないので、それ自体確率変数である。しかし情報  $\mathcal{G}$  を得られれば確定するので、すなわち  $\mathcal{G}$ -可測である。これが定義 B.2.2.2 の 1. である。2. はそれが本当に期待値であることを保証している。

証明は与えないが、条件付き期待値は以下の 5 つの基本的な性質を満たす。

定理 B.2.2.1  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とし、 $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族であるとする。

1. 線形性  $X$  と  $Y$  が可積分な確率変数で、 $c_1$  と  $c_2$  が定数であるとする、次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[c_1 X + c_2 Y|\mathcal{G}] = c_1 \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + c_2 \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \quad (\text{B.2.9})$$

2. 既知量のくり出し  $X$  と  $Y$  が可積分な確率変数で、 $Y$  と  $XY$  が共に可積分で、 $X$  が  $\mathcal{G}$ -可測ならば、次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]. \quad (\text{B.2.10})$$

3. 反復条件付け  $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{G}$  の部分  $\sigma$ -加法族 ( $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{G}$  より少ない情報しか持たない) であり、 $X$  は可積分な確率変数であるとする、次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]. \quad (\text{B.2.11})$$

4. 独立性もし  $X$  が可積分で  $\mathcal{G}$  と独立ならば、次が成り立つ。

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X. \quad (\text{B.2.12})$$

5. 条件付き Jensen の不等式  $\phi(x)$  が仮の変数  $x$  に関する凸な関数で、 $X$  が可積分ならば、次の不等式が成り立つ。

$$\mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}] \geq \phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]). \quad (\text{B.2.13})$$

最後に適合確率過程のある重要なクラスを定義してこの節を終わりにしよう。具体例については次節以降で与える。

定義 B.2.2.3  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とし、 $T$  を正の定数とする。また  $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -加法族からなるフィルトレーションとする。ある適合確率過程  $M(t), 0 \leq t \leq T$  を考える。

1. この確率過程が、

$$\text{すべての } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ に対し、} \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] = M(s), \quad (\text{B.2.14})$$

を満たすとき、この確率過程はマルチンゲールであると言う。これは、上昇したり下降したりする傾向を持たない。

2. この確率過程が、

$$\text{すべての } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ に対し、} \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] \geq M(s), \quad (\text{B.2.15})$$

を満たすとき、この確率過程は劣マルチンゲールであると言う。これは、下降する傾向は持たず、上昇する傾向を持つ。

3. この確率過程が、

$$\text{すべての } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ に対し、} \mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)] \leq M(s), \quad (\text{B.2.16})$$

を満たすとき、この確率過程は優マルチンゲールであると言う。これは、上昇する傾向は持たず、下降する傾向を持つ。

## B.3 ブラウン運動

この節ではブラウン運動を定義し、その性質を議論していき、最終的に第 4 章で使う、到達時刻の分布について述べる。ブラウン運動の定義は B.3.2 項で与えるが、その前にまずは直感的理解を深める。

## B.3.1 大きさ調整されたランダムウォーク

## B.3.1.1 対称ランダムウォーク

ブラウン運動を構築するために、対称ランダムウォークから説明する。対称ランダムウォークを構築するためには、公正なコイン（表  $H$  が出る確率も裏  $T$  が出る確率も  $1/2$ ）を無限回投げる。一連のコイン投げの結果は  $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots$  と記され、 $\omega_n$  は  $n$  回目のコイン投げの結果である。ここで、

$$X_j = \begin{cases} 1 & \omega_j = H \text{ の場合} \\ -1 & \omega_j = T \text{ の場合} \end{cases} \quad (\text{B.3.1})$$

と定義し、さらに  $M_0 = 0$  として、確率過程  $M_k$  を以下で定義する。

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{B.3.2})$$

この確率過程  $M_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  が対称ランダムウォークである。各コイン投げにおいて起こることは、1 増加するかまたは 1 減少するかのどちらかであり、これら 2 つの可能性はどちらも同じ確率である。

## B.3.1.2 対称ランダムウォークの増分

ランダムウォークは独立増分を持つ。この意味は、任意の非負の整数  $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_m$  に対して、以下に示す確率変数が独立になることである。

$$M_{k_1} - M_{k_0}, (M_{k_2} - M_{k_1}), \dots, (M_{k_m} - M_{k_{m-1}}). \quad (\text{B.3.3})$$

これらの各確率変数

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j, \quad (\text{B.3.4})$$

を、ランダムウォークの増分と呼ぶ。これは時刻  $k_i$  と  $k_{i+1}$  の間のランダムウォークの位置の変化である。重複しない時間間隔上での増分は、異なるコイン投げに従うことから、独立である。

さらに、それぞれの増分  $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$  は、期待値ゼロで、 $k_{i+1} - k_i$  の分散を持つ。期待値がゼロであることを確認するのは簡単で、式 (B.3.4) の右辺に出てくる各  $X_j$  の期待

値がすべてゼロだからである。また  $\text{Var}(X_j) = \mathbb{E}X_j^2 = 1$  で、異なる  $X_j$  は独立であることから、式 (B.3.4) より以下を導くことができる。

$$\text{Var}(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \text{Var}(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i. \quad (\text{B.3.5})$$

対称ランダムウォークの分散は、単位時間あたり 1 の割合で蓄積していくので、任意の負でない整数  $k < l$  に対し、 $k$  から  $l$  の時間間隔上の増分の分散は  $l - k$  である。

### B.3.1.3 対称ランダムウォークのマルチンゲール性

対称ランダムウォークがマルチンゲールであることを確認するために、非負の整数  $k < l$  を選んで、以下の計算をしよう。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_l | \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[(M_l - M_k) + M_k | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}[M_l - M_k | \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[M_k | \mathcal{F}_k] \\ &= \mathbb{E}[M_l - M_k | \mathcal{F}_k] + M_k \\ &= \mathbb{E}[M_l - M_k] + M_k = M_k. \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

ここで、 $\mathbb{E}[\dots | \mathcal{F}_k]$  は前節で導入した表記で、時刻  $k$  での情報に基づく条件付き期待値を意味する。この場合の情報とは、最初の  $k$  回のコイン投げの結果である。2 番目の等号は、条件付き期待値の線形性の結果を使っている (定理 B.2.2.1 の 1.)。3 番目の等号は、 $M_k$  は最初の  $k$  回のコイン投げの結果のみに依存しており、 $\mathcal{F}_k$ -可測であるからである。4 番目の等号は、独立性 (定理 B.2.2.1 の 4.) によるものである。

### B.3.1.4 対称ランダムウォークの 2 次変分

対称ランダムウォークに関する話題の最後として、対称ランダムウォークの 2 次変分について考える。時刻  $k$  に至るまでの 2 次変分は以下のように定義される。

$$[M, M]_k = \sum_{j=1}^k (M_j - M_{j-1})^2 = k. \quad (\text{B.3.7})$$

ここで注意したいのは、上式は経路毎に計算されているということである。ある経路に沿った、時刻  $k$  に至るまでの 2 次変分は、その経路に沿って、各ステップごとの増分  $M_j - M_{j-1}$  を取り (これらは  $X_j$  に等しいが、これは経路に依存して 1 もしくは  $-1$  となる)、それぞれの増分を 2 乗し、それらを合計することによって計算される。 $(M_j - M_{j-1})^2 = 1$  なので、 $M_j - M_{j-1}$  が 1 か  $-1$  にかかわらず、式 (B.3.7) の合計は、上記に示してあるように、 $\sum_{j=1}^k 1 = k$  に等しいのである。



ここで  $[M, M]_k$  は  $\text{Var}(M_k)$  と同じであるが、この2つの数量の計算はかなり異なることに注意しよう。 $\text{Var}(M_k)$  は、すべての経路にわたって、それぞれの確率を考慮し、平均を取ることにより計算される。ランダムウォークの分散は理論上のみ、計算できる。なぜなら、実現されている経路もされていない経路も含めすべての経路にわたっての平均が必要となるからである。一方、実現した経路に沿った2次変分は、かなり明確に計算できる。ランダムウォークには、 $[M, M]_k$  は選ばれた特別な経路に依存しないという、やや例外的な性質があるが、一般には、確率過程の2次変分は計算された経路に依存する。

### B.3.1.5 大きさ調整された対称ランダムウォーク

ブラウン運動を近似するために、対称ランダムウォークの時間の流れを加速し、ステップ幅を縮小する。より正確に言えば、正の整数  $n$  を決めて、大きさ調整された対称ランダムウォークを次のように定義する。 $nt$  それ自身が整数であるときには、

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}, \quad (\text{B.3.8})$$

とする。もし  $nt$  が整数でなければ、時刻  $t$  の左右に位置する点  $s$  と  $u$  を、 $ns$  と  $nu$  が整数となるようなものの内  $t$  に最も近い点としてそれぞれ選び、 $s$  と  $u$  での値を線形補間することにより  $W^{(n)}(t)$  を定義する。 $n \rightarrow \infty$  として極限を取ることによって、ブラウン運動を得ることとする。図 B.1 に時刻 4 までシミュレーションとした経路を示す。これは、それぞれのコイン投げにおける1回の上昇、下降の大きさを  $1/10$  とし、400回のコイン投げによって作成されている。

ランダムウォークと同様、大きさ調整されたランダムウォークも独立した増分を持つ、それぞれの  $nt_j$  が整数であるような  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  を選ぶと、

$$(W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)), (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)), \\ \dots, (W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1})), \quad (\text{B.3.9})$$

は独立である。さらに、 $ns$  と  $mt$  が整数となるように  $0 \leq s \leq t$  を選ぶと、以下が成り立つ。

$$\mathbb{E}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = 0, \quad \text{Var}(W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) = t - s. \quad (\text{B.3.10})$$

これは  $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$  が、それぞれの期待値がゼロで分散が  $1/n$  である、独立な  $n(t-s)$  の確率変数の合計だからである。

B.3.1.3 項においてランダムウォークのマルチンゲール性を示したのと同様にすれば、大きさ調整されたランダムウォークに対するマルチンゲール性も証明することができる。すなわち、 $ns$  と  $nt$  が整数となるような  $0 \leq s \leq t$  に対し、

$$\mathbb{E}[W^{(n)}(t) | \mathcal{F}(s)] = W^{(n)}(s), \quad (\text{B.3.11})$$

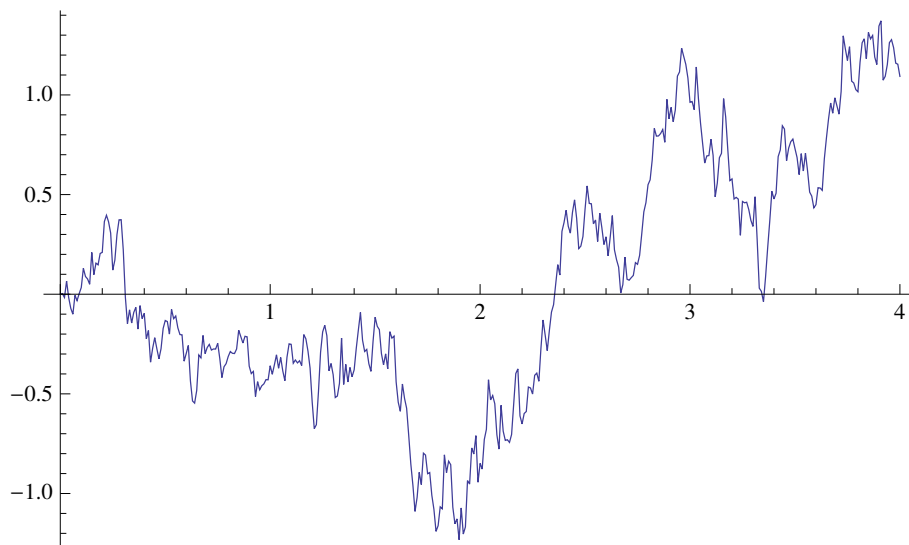


図 B.1.  $W^{(100)}$  の標本経路。

が成り立つ。

最後に、大きさ調整されたランダムウォークの2次変分を考える。 $nt$ が整数であるような  $t \leq 0$  に対し、2次変分は、

$$\begin{aligned} [W^{(n)}, W^{(n)}](t) &= \sum_{j=1}^{nt} \left[ W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{nt} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right]^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t, \end{aligned} \quad (\text{B.3.12})$$

と定義される。これは経路毎の計算であり、原理的には特定の経路に依存するが、やはり大きさ調整されたランダムウォークの場合も経路に依存せず  $t$  となる。ここで  $\text{Var}W^{(n)}(t)$  も  $t$  であるが、こちらはすべての起こり得る経路上の平均値であることに注意しよう。

### B.3.2 ブラウン運動

式 (B.3.8) の大きさ調整されたランダムウォーク  $W^{(n)}(t)$  の  $n \rightarrow \infty$  による極限としてブラウン運動を得る。ブラウン運動はこれらのランダムウォークの特徴を引き継いでおり、このことが次の定義へとつながる。

定義 B.3.2.1  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とする。各  $\omega \in \Omega$  に対して、 $W(0) = 0$  を満たし、 $\omega$  に依存する連続関数  $W(t), t \leq 0$  が存在すると仮定する。このとき、 $W(t), t \leq 0$  がブラウン運動であるとは、すべての  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  に対し、増分、

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1}), \quad (\text{B.3.13})$$

が独立で、これらの増分それぞれがガウス分布で、以下の条件を満たす場合を言う。

$$\mathbb{E}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0, \quad \text{Var}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = t_{i+1} - t_i. \quad (\text{B.3.14})$$

定義 B.3.2.1 の  $\omega$  に対する考え方には 2 通りある。1 つはブラウン運動の経路そのものを  $\omega$  ととらえる方法である。もう 1 つの方法としては、 $\omega$  を、より根源的な、一連のコイン投げの結果に類するものとして考えることができる。ここで、 $n \rightarrow \infty$  の極限を取っていることから、仮に有限の時刻  $t$  に対する  $W(t)$  を考えようと思っても、それには無限回のコイン投げの結果が必要となる。これが無限確率空間を導入してきた理由である。

中心極限定理を考慮してブラウン運動にはガウス分布を要請している。従って、例えば  $0 \leq W(t) \leq m$  を満たす確率は、

$$\mathbb{P}\{0 \leq W(t) \leq m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^m e^{-x^2/2t} dx, \quad (\text{B.3.15})$$

のように計算される。

### B.3.3 2 次変分

これまで何度か 2 次変分という量を計算してきた。実は後述するように、普通の関数に関してこれはゼロとなり、ブラウン運動の経路に関してはゼロとならない。この点で、確率解析と通常の解析学とは一線を画しており、後に伊藤積分を定義する時に重要になってくる。

式 (B.3.12) で、時刻  $T$  までの大きさ調整されたランダムウォーク  $W^{(n)}$  の 2 次変分を計算し、これが  $T$  となることを確認した。これは、時刻 0 と  $T$  の間の大きさ調整されたランダムウォークの各ステップごとに増分を取り打ち、2 乗して、加算することにより計算された。

ブラウン運動に対しては、自然な時間間隔は存在しない。 $T > 0$  が与えられると、例えばある大きな  $n$  に対し  $T/n$  等の単純な時間間隔を選び、この時間間隔を用いて時刻  $T$  までの 2 次変分を計算することができる。すなわち、次のように計算できる。

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[ W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right]^2. \quad (\text{B.3.16})$$

ここでは、小さな時間間隔に対するこの量に関心があり、従って特に最終段階として、 $n \rightarrow \infty$  としたときの極限を評価したい。これを行うと  $T$  を得るが、これは大きさ調整されたランダムウォークに対する結果と同じである。これは後述する定理 B.3.3.1 で証明される。

まずは連続関数に対して 2 次変分を定義しよう。

定義 B.3.3.1  $f(t)$  を  $0 \leq t \leq T$  で定義された関数とする。時刻  $T$  までの  $f$  の 2 次変分は次で定義される。

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2. \quad (\text{B.3.17})$$

ただし、 $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  であり、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  である。

注意 B.3.3.1 関数  $f$  が連続微分可能とする。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j), \end{aligned} \quad (\text{B.3.18})$$

である。ただし、 $t_j^*$  は、

$$\frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = f'(t_j^*), \quad (\text{B.3.19})$$

を満たすような点であり、これが各部分期間  $[t_j, t_{j+1}]$  に存在することは平均値の定理から示される。これから次が成り立つ。

$$\begin{aligned} [f, f](T) &\leq \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left[ \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \cdot \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \|\Pi\| \cdot \int_0^T |f'(t)|^2 dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3.20})$$

この議論の最後で、 $\int_0^T |f'(t)|^2 dt$  が有限であると保証するために、 $f'(t)$  が連続であることを用いた。もし  $\int_0^T |f'(t)|^2 dt$  が無限であるならば、

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left[ \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} |f'(t_j^*)|^2 (t_{j+1} - t_j) \right], \quad (\text{B.3.21})$$

は  $0 \cdot \infty$  の状態となり、 $0$  と  $\infty$  の間のどんな値をも取り得る。

通常扱う関数は連続微分可能であることがほとんどで、よってそれらの 2 次変分はゼロとなる。この理由から、通常の解析学では、2 次変分を考えることはない。一方、ブラ

ウン運動の経路は、時刻変数について微分可能ではない。図 B.1 は、ブラウン運動の経路が、“尖った点”を非常に多く持つことをまさに示しており、実際、ブラウン運動の経路  $W(t)$  に対し、 $dW(t)/dt$  が定義される  $t$  の値は存在しない。微分可能ではない関数に対しては、平均値の定理は役に立たず、注意 B.3.3.1 はもはや適用できない。

定理 B.3.3.1  $W$  をブラウン運動とする。このとき、すべての  $T \leq 0$  に対し、ほとんど確実に  $[W, W](T) = T$  である。

証明  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  を  $[0, T]$  の分割とする。この区分と一致する、抽出 2 次変分 (sampled quadratic variation) を次で定義する。

$$Q_{\Pi} = \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2. \quad (\text{B.3.22})$$

抽出 2 次変分は確率変数である。すなわち、計算するブラウン運動の経路に依存する。しかし、 $\|\Pi\| \rightarrow 0$  とするときこの抽出 2 次変分が  $T$  に収束することを示さなければならない。抽出 2 次変分は、期待値が  $T$  で、その分散がゼロに収束することを示そう。これによって、これは、計算する経路に関係なく、期待値  $T$  に収束する\*3。

抽出 2 次変分は、独立した確率変数の合計である。従って、その平均と分散はこれらの確率変数の平均と分散の合計となる。ここで、

$$\mathbb{E}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 = \text{Var}[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = t_{j+1} - t_j, \quad (\text{B.3.23})$$

であるので、ねらい通り次式を得る。

$$\mathbb{E}Q_{\Pi} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T. \quad (\text{B.3.24})$$

さらに、次式が示される。

$$\begin{aligned} & \text{Var}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \\ &= \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)]^2 \\ &= \mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4] - 2(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] \\ & \quad + (t_{j+1} - t_j)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.3.25})$$

Wick の定理より、平均ゼロのガウス分布確率変数の 4 次のモーメントは、分散の 2 乗の 3 倍となる。よって、

$$\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4] = 3(t_{j+1} - t_j)^2. \quad (\text{B.3.26})$$

\*3 証明する収束は、実際は 2 乗平均の意味の収束で、これは  $L^2$ -収束とも呼ばれる。この収束が起こるとほとんど確実に収束する部分列が存在する。ここでは、確率変数の収束の種類の細かな違いについては、議論しないこととする。

従って、

$$\begin{aligned}\text{Var}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] &= 3(t_{j+1} - t_j)^2 - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &= 2(t_{j+1} - t_j)^2,\end{aligned}\tag{B.3.27}$$

となる。以上より、次を得る。

$$\begin{aligned}\text{Var}(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} \text{Var}[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2\|\Pi\|(t_{j+1} - t_j) = 2\|\Pi\|T.\end{aligned}\tag{B.3.28}$$

特に、 $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \text{Var}(Q_\Pi) = 0$  となり、 $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} Q_\Pi = \mathbb{E}Q_\Pi = T$  であることが結論付けられる。

期間  $[0, T_1]$  上で、ブラウン運動の 2 次変分を計算すると、 $[W, W](T_1) = T_1$  を得る。 $0 < T_1 < T_2$  として、期間  $[0, T_2]$  上で、2 次変分を計算すると、 $[W, W](T_2) = T_2$  を得る。従って、期間  $[T_1, T_2]$  を分割し、期間の中の各部分期間に対するブラウン運動の増分を 2 乗し、それらの和を取ったものについて、最大の時間間隔をゼロに近づけたときの極限を取ると、極限  $[W, W](t_2) - [W, W](t_1) = T_2 - T_1$  を得る。すべての期間でこれは正しいので、このことから結論付けられるのは、

$$\text{ブラウン運動は単位時間あたり 1 の割合で 2 次変分を蓄積する}\tag{B.3.29}$$

ということである。正式な記法ではないがこのことを、

$$dW(t)dW(t) = dt,\tag{B.3.30}$$

のように書くことにする。

ブラウン運動の 2 次変分に加えて、 $W(t)$  と  $t$  の共変分 (cross variation) と、 $t$  同士の 2 次変分も計算することができ、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j) &= 0, \\ \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 &= 0.\end{aligned}\tag{B.3.31}$$

これらも次のように記述しておこう。

$$dW(t)dt = 0, \quad dt dt = 0.\tag{B.3.32}$$

## B.3.4 到達時刻の分布

本項ではいよいよ実際にインフレーション理論の  $\delta N$  形式に応用される到達時刻について述べる。まずはブラウン運動の場合について考え、その後ドリフトを持つブラウン運動の場合について取り扱う。

ここでは、指数関数の中にブラウン運動の項を含む形のマルチンゲールの説明から始める。定数  $\sigma$  に対応するいわゆる指数マルチンゲール (exponential martingale) は以下で定義される。

$$Z(t) = \exp \left\{ \sigma W(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\}. \quad (\text{B.3.33})$$

定理 B.3.4.1 (指数マルチンゲール)  $W(t)$ ,  $t \leq 0$  をブラウン運動、それに対するフィルトレーションを  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \leq 0$  とし、 $\sigma$  を定数とする。式 (B.3.33) の過程  $Z(t)$ ,  $t \leq 0$  はマルチンゲールである。

証明  $0 \leq s \leq t$  に対して、次の計算が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \sigma W(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \middle| \mathcal{F}(s) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \{ \sigma (W(t) - W(s)) \} \cdot \exp \left\{ \sigma W(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \middle| \mathcal{F}(s) \right] \\ &= \exp \left\{ \sigma W(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right\} \cdot \mathbb{E}[\exp \{ \sigma (W(t) - W(s)) \} | \mathcal{F}(s)]. \end{aligned} \quad (\text{B.3.34})$$

ただし、既知量のくくり出し (定理 B.2.2.1 の 2.) を最後の等号のところで用いた。次に、独立性 (定理 B.2.2.1 の 4.) を用いると、次のように書ける。

$$\mathbb{E}[\exp \{ \sigma (W(t) - W(s)) \} | \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[\exp \{ \sigma (W(t) - W(s)) \}]. \quad (\text{B.3.35})$$

$W(t) - W(s)$  は平均ゼロで分散  $t - s$  のガウス分布であるので、この期待値は、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp \{ \sigma (W(t) - W(s)) \}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 (t - s) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.3.36})$$

となる。式 (B.3.34) にこれを代入して、次のマルチンゲール性を得る。

$$\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \exp \left\{ \sigma W(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 s \right\} = Z(s). \quad (\text{B.3.37})$$

さて、 $m$  を実数として、レベル  $m$  への到達時刻を次のように定義する。

$$\tau_m = \min\{t \geq 0 | W(t) = m\}. \quad (\text{B.3.38})$$

これは、ブラウン運動  $W$  がレベル  $m$  に到達する最初の時刻である。ブラウン運動が決してレベル  $m$  に到達しない場合は、 $\tau_m = \infty$  と定める。注意すべきは到達時刻は経路による、確率変数であることである。そしてこれは同時に、停止時刻でもある。

定義 B.3.4.1 停止時刻  $\tau$  は、 $[0, \infty]$  に値を取る確率変数で、次を満たす。

$$\text{すべての } t \geq 0 \text{ に対し、} \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t). \quad (\text{B.3.39})$$

つまり停止時刻  $\tau$  は、時刻  $t$  における停止の決定が時刻  $t$  において利用可能な情報  $\mathcal{F}(t)$  に基づかなければならない。到達時刻は、時刻  $t$  でレベル  $m$  に到達しているか否かは  $\mathcal{F}(t)$ -可測なので、停止時刻である。また停止時刻  $\tau$  で停止させた過程、例えば  $W(t \wedge \tau)$  は停止過程と呼ばれる。ただし  $t \wedge \tau = \min\{t, \tau\}$  である。証明はしないが、停止過程に対しては次の重要な定理が成り立つ。

定理 B.3.4.2 (任意抽出定理) マルチンゲールを停止時刻で停止した過程はまた、マルチンゲールである。優マルチンゲール (または劣マルチンゲール) を停止時刻で停止した過程はまた、優マルチンゲール (または劣マルチンゲール) である。

これは例えばギャンブルなどにも重要な定理である。時刻  $t$  での自分の資産を  $M(t)$  とすれば、ギャンブルが公正ならば  $M(t)$  はマルチンゲールとなるだろう。すなわち現在時刻  $s$  に対し未来の時刻  $t$  での資産の期待値  $\mathbb{E}[M(t)|\mathcal{F}(s)]$  は、現在の資産  $M(s)$  に対して増えも減りもしない。そしてギャンブルを止める条件をあらかじめ決めておいたとする (資産が初めの半分になったときでも、スリーセブンが出たときでも、隣の人が席を立ったときでも、何でもとにかく停止時刻としての定義を満たせばよい)。このときどのような停止条件をとってきたとしても、資産の期待値が上昇するような停止条件は存在しない、というのが任意抽出定理の述べるところである。

さて、到達時刻が停止時刻であるということと、任意抽出定理から、以下の興味深い事実が得られる。

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \sigma W(t \wedge \tau_m) - \frac{1}{2} \sigma^2 (t \wedge \tau_m) \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} Z(t \wedge \tau_m) = \mathbb{E}[Z(t \wedge \tau_m) | \mathcal{F}(0)] = Z(0) = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.3.40})$$

次に、 $\sigma > 0$  と  $m > 0$  を仮定する。この場合、ブラウン運動は  $t \leq \tau_m$  において常にレベル  $m$  以下であり、よって以下を得る。

$$0 \leq \exp\{\sigma W(t \wedge \tau_m)\} \leq e^{\sigma m}. \quad (\text{B.3.41})$$



$\tau_m < \infty$  ならば、 $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\}$  の項は、十分大きな  $t$  に対しては  $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\}$  と等しい。一方、 $\tau_m = \infty$  ならば、 $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\}$  の項は、 $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t\}$  と等しく、 $t \rightarrow \infty$  とすると、これはゼロに収束する。次のように記述することにより、この両方の場合をとらえることができる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\right\} = \mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\right\}. \quad (\text{B.3.42})$$

ここで、表記  $\mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}}$  は、 $\tau_m < \infty$  のとき値 1 を取り、それ以外は値 0 を取る確率変数を示す。 $\tau_m < \infty$  の場合、 $t$  が十分大きくなると、 $\exp\{\sigma W(t \wedge \tau_m)\} = \exp\{\sigma W(\tau_m)\} = e^{\sigma m}$  となる。 $\tau_m = \infty$  の場合、 $t \rightarrow \infty$  で  $\exp\{\sigma W(t \wedge \tau_m)\}$  がどうなるかはわからないが、少なくとも式 (B.3.41) から、この項が有界であることはわかる。従って、 $\tau_m = \infty$  の場合、 $\exp\{\sigma W(t \wedge \tau_m)\}$  と  $\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\}$  の積の  $t \rightarrow \infty$  としたときの極限値がゼロとなることがわかる。これがわかれば、結論として次を得るのに十分である。

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left\{\sigma W(t \wedge \tau_m) - \frac{1}{2}\sigma^2(t \wedge \tau_m)\right\} \\ &= \mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\left\{\sigma m - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.3.43})$$

ここで、式 (B.3.40) の両辺の極限をとることにより、次式を得る。

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\left\{\sigma m - \frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\right\}\right] = 1. \quad (\text{B.3.44})$$

もしくは同値なこととして、次式を得る。

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\right\}\right] = e^{-\sigma m}. \quad (\text{B.3.45})$$

さらに、両辺  $\sigma \rightarrow 0$  の極限を取って、 $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\tau_m < \infty\}}] = 1$  を得る。もしくは同値なこととして、次式を得る。

$$\mathbb{P}\{\tau_m < \infty\} = 1. \quad (\text{B.3.46})$$

すなわちほとんど確実に  $\tau_m$  が有限なので、式 (B.3.45) からこの事象の定義関数を外すことにより、次式が得られる。

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_m\right\}\right] = e^{-\sigma m}. \quad (\text{B.3.47})$$

これで、次の定理の証明における大きな作業を既に行ったことになる。

**定理 B.3.4.3**  $m \in \mathbb{R}$  に対して、レベル  $m$  へのブラウン運動の到達時刻はほとんど確実に有限であり、その分布の母関数は次式により与えられる。

$$\mathbb{E}e^{-J\tau_m} = e^{-|m|\sqrt{2J}}, \quad J > 0. \quad (\text{B.3.48})$$

証明 まず、 $m$  が正の場合を考える。 $J$  を正の定数とし、 $\frac{1}{2}\sigma^2 = J$  となるように  $\sigma = \sqrt{2J}$  を定める。このとき、式 (B.3.48) は式 (B.3.47) となる。 $m$  が負であれば、ブラウン運動は対称であるので、到達時刻  $\tau_m$  と  $\tau_{|m|}$  は、同じ分布を持つ。従って、負の  $m$  に対する式 (B.3.48) も成り立つ。

式 (B.3.48) を母関数と表現したのは、両辺を任意回数  $J$  で微分すれば到達時刻  $\tau_m$  の任意次数モーメントを求めることができるからである。例えば  $J$  で 1 回微分すると、

$$\mathbb{E}[\tau_m e^{-J\tau_m}] = \frac{|m|}{\sqrt{2J}} e^{-|m|\sqrt{2J}}, \quad J > 0. \quad (\text{B.3.49})$$

$J \rightarrow 0$  とすることにより、 $m \neq 0$  であるかぎり  $\mathbb{E}\tau_m = \infty$  であることを得る。

ドリフトを持つブラウン運動においても同様のことができる。ドリフトを持つブラウン運動は次のような確率過程である。

$$X(t) = \mu t + W(t). \quad (\text{B.3.50})$$

これに対しレベル  $m$  への到達時刻、

$$\tau_m = \min\{t \geq 0 | X(t) = m\}. \quad (\text{B.3.51})$$

を考える。ここでは  $m, \mu > 0$  としよう。ドリフトが付いた分、それを差し引いた次の確率過程が指数マルチンゲールとなる。

$$Z(t) = \exp\left\{\sigma X(t) - \left(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}. \quad (\text{B.3.52})$$

ブラウン運動の時と同様にして、

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma m - \left(\sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_m\right\}\right] = 1, \quad (\text{B.3.53})$$

を得、 $J = \sigma\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$  とすれば、

$$\mathbb{E}e^{-J\tau_m} = e^{m\mu - m\sqrt{2J + \mu^2}}, \quad J > 0, \quad (\text{B.3.54})$$

となる。これがドリフトを持つブラウン運動に対する到達時刻の母関数である。例えば  $\tau_m$  の期待値は、

$$\mathbb{E}\tau_m = -\lim_{J \rightarrow 0} \frac{d}{dJ} e^{m\mu - m\sqrt{2J + \mu^2}} = \frac{m}{\mu}, \quad (\text{B.3.55})$$

となる。これはブラウン運動がないときの過程、 $X(t) = \mu t$  に対する到達時刻と一致しており、ブラウン運動が対称であることの直感にあう。

## B.4 伊藤積分

この節では伊藤積分を定義し、Langevin 方程式を数学的にどう扱うかについて述べる。

### B.4.1 被積分過程が単過程の場合の伊藤積分

まず正の定数  $T$  に対し、

$$\int_0^T \Delta(t) dW(t), \quad (\text{B.4.1})$$

を構築したい。ここでの基本的な要素は、ブラウン運動  $W(t)$ ,  $t \geq 0$  および、このブラウン運動に対するフィルトレーション  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$  である。ここでは  $\Delta(t)$  を適合確率過程とする。

ブラウン運動は微分不可能であるため、この積分は単純に理解できない。すなわち、 $g(t)$  が微分可能な関数であれば、

$$\int_0^T \Delta(t) dg(t) = \int_0^T \Delta(t) g'(t) dt, \quad (\text{B.4.2})$$

とできるが、これはブラウン運動には適用できない。そこでまずは、単純な被積分過程  $\Delta(t)$  に対して伊藤積分を定義し、その極限として一般の被積分過程の積分に拡張しよう。

$\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  を  $[0, T]$  の分割とする。すなわち、

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T, \quad (\text{B.4.3})$$

とする。各部分期間  $[t_j, t_{j+1})$  上では、 $\Delta(t)$  は  $t$  について一定であると仮定する。このような過程  $\Delta(t)$  を単過程という (図 B.2 参照)。  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  である  $t$  に対し、この単過程  $\Delta(t)$  の伊藤積分  $I(t)$  を以下で定義しよう。

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k) [W(t) - W(t_k)]. \quad (\text{B.4.4})$$

これを積分の形で次のように書くとする。

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u). \quad (\text{B.4.5})$$

特に、 $t = t_n = T$  と取ることができて、式 (B.4.4) が伊藤積分 (B.4.1) に対する定義を与える。

この積分のいくつかの性質について述べていこう。

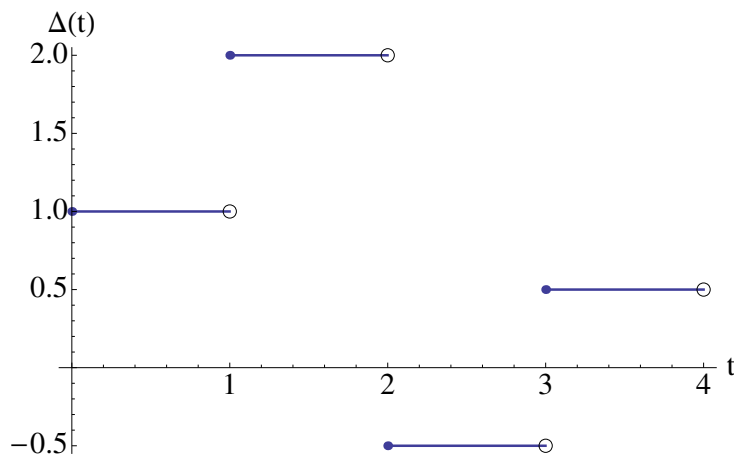


図 B.2. 単過程の例。

定理 B.4.1.1 式 (B.4.4) で定義される伊藤積分  $I(t)$  は以下の性質を満たす。

1.  $I(t)$  はマルチンゲールである。
2. 伊藤の等長性  $I(t)$  は以下を満たす。

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u) dW(u). \quad (\text{B.4.6})$$

3.  $I(t)$  によって時刻  $t$  に至るまでに累積される 2 次変分は、次で得られる。

$$[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du. \quad (\text{B.4.7})$$

これらの証明は今までに行ってきた計算とほぼ同様に行えるので省略する。2 次変分について、ブラウン運動が単位時間あたり 1 の重みで 2 次変分を蓄積すること、

$$[W, W](t) = t, \quad t \geq 0, \quad (\text{B.4.8})$$

を、微分形式で次のように簡略的に記したことを思い出そう。

$$dW(t)dW(t) = dt. \quad (\text{B.4.9})$$

伊藤積分の式  $I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u)$  は、微分形式では  $dI(t) = \Delta(t) dW(t)$  と書かれ、 $dI(t)$  の 2 乗は次のようになる。

$$dI(t)dI(t) = \Delta^2(t) dW(t)dW(t) = \Delta^2(t) dt. \quad (\text{B.4.10})$$

この式は、伊藤積分  $I(t)$  が単位時間あたり  $\Delta^2(t)$  の割合で 2 次変分を累積することを述べている。累積の割合は、一般には時刻にも経路にも依存する。式 (B.4.10) は式 (B.4.7) の結果を述べるもう 1 つの方法である。

## B.4.2 一般の被積分過程に対する伊藤積分

今度は、時間と共に連続的に変化し、さらにはジャンプすることまで許された被積分過程  $\Delta(t)$  に対する伊藤積分  $\int_0^T \Delta(t)dW(t)$  を定義する。 $\Delta(t)$  としてもはや単過程であることは仮定しないが、フィルトレーション  $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$  について適合過程であることは仮定する。また、次式で示す 2 乗可積分性の条件も仮定する。

$$\mathbb{E} \int_0^T \Delta^2(t)dt < \infty. \quad (\text{B.4.11})$$

$\int_0^T \Delta(t)dW(t)$  を定義するために、 $\Delta(t)$  を単過程で近似する。近似の仕方はいろいろあるが伊藤積分の定義においては次のようにする。まず  $[0, T]$  の分割  $\Pi_n = t_0, t_1, \dots, t_n$  を選び、 $t_j \leq t < t_{j+1}$  の  $t$  に対して  $\Delta_n(t) = \Delta(t_j)$  である単過程  $\Delta_n(t)$  を持つてくる。一般に、単過程の列  $\Delta_n(t)$  を、 $n \rightarrow \infty$  で  $\Delta(t)$  に収束するように選ぶことができる。ただしここで、収束するとは以下の意味である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2 dt = 0. \quad (\text{B.4.12})$$

この  $\Delta_n(t)$  で  $\Delta(t)$  を近似する。すなわち  $\Delta(t)$  を細かく分割し、各分割の最初の点での値で  $\Delta(t)$  を近似するということだ (図 B.3)。この近似を用いて、連続的に変化する  $\Delta(t)$  に対しての伊藤積分を定義する。

$$\int_0^t \Delta(u)dW(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \Delta_n(u)dW(u), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (\text{B.4.13})$$

この積分は、単過程の伊藤積分の性質を継承する。

定理 B.4.2.1  $T$  を正の定数とし、 $\Delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  を、式 (B.4.11) を満たす適合確率過程とする。このとき、式 (B.4.13) で定義される  $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$  は次の性質を持つ。

1. 連続性積分区間の上限  $t$  についての関数として、 $I(t)$  の経路は連続である。
2. 適合性各  $t$  に対して、 $I(t)$  は  $\mathcal{F}(t)$ -可測である。
3. 線形性  $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$  かつ  $J(t) = \int_0^t \Gamma(u)dW(u)$  とすると、 $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\Delta(u) \pm \Gamma(u))dW(u)$  である。さらにすべての定数  $c$  に対して、 $cI(t) = \int_0^t c\Delta(u)dW(u)$  である。
4. マルチンゲール性  $I(t)$  はマルチンゲールである。
5. 伊藤の等長性  $\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \Delta^2(u)du$  である。
6. 2 次変分  $[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du$  である。

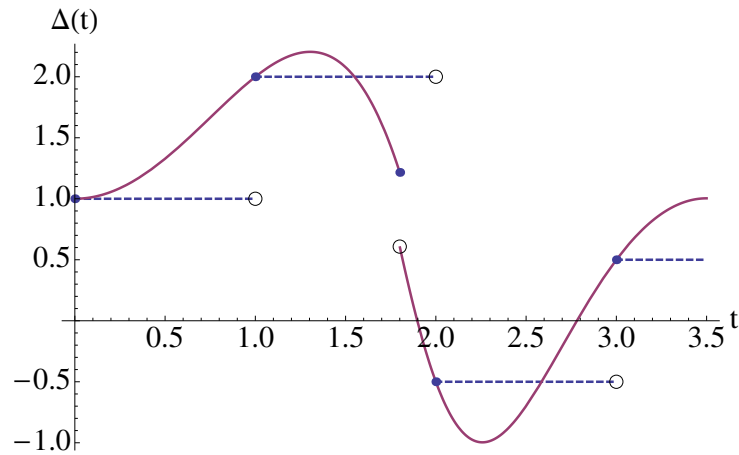


図 B.3. 連続的に変化する被積分過程の近似。

例題 B.4.2.1  $\int_0^T W(t)dW(t)$  を計算しよう。まずは大きい整数  $n$  を選び、被積分過程  $\Delta(t) = W(t)$  を次の単過程で近似する。

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} W(0) = 0 & 0 \leq t < \frac{T}{n} \\ W\left(\frac{T}{n}\right) & \frac{T}{n} \leq t < \frac{2T}{n} \\ \vdots & \\ W\left(\frac{(n-1)T}{n}\right) & \frac{(n-1)T}{n} \leq t < T \end{cases} \quad (\text{B.4.14})$$

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_0^T |\Delta_n(t) - W(t)|^2 dt = 0$  である。定義により、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Delta_n(t)dW(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right) \left[ W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4.15})$$

表記を簡単にするために、 $W_j = W\left(\frac{jT}{n}\right)$  と書くことにする。上式の極限を評価するため

に、次式を計算しておく。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{j+1} - W_j)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} W_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\
&= \frac{1}{2} W_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\
&= \frac{1}{2} W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} \\
&= \frac{1}{2} W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j (W_j - W_{j+1}). \tag{B.4.16}
\end{aligned}$$

3つ目の等号では、 $W_0 = W(0) = 0$ であることを思い出そう。この式より、

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_j (W_{j+1} - W_j) = \frac{1}{2} W_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W_{j+1} - W_j)^2, \tag{B.4.17}$$

を得る。従って式 (B.4.15) は、

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} [W, W](T) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T, \tag{B.4.18}$$

となる。この最後の  $-T/2$  の項が、ブラウン運動のゼロでない2次変分から来ている。実際微分可能な普通関数  $g(t)$ ,  $g(0) = 0$  に対し、

$$\int_0^T g(t) dg(t) = \int_0^T g(t) g'(t) dt = \frac{1}{2} g^2(t) \Big|_0^T = \frac{1}{2} g^2(T), \tag{B.4.19}$$

と、余分な項は出ない。伊藤積分では常に被積分過程を部分期間の左端点で評価して単過程に近似するが、実はこの単過程の選び方を変えると  $-T/2$  項を消すことができる。それには、被積分過程を部分期間の中央の点で評価して、次のようにする。

$$\begin{aligned}
&\int_0^T W(t) dW(t) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{(j+\frac{1}{2})T}{n}\right) \left[ W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right) \right]. \tag{B.4.20}
\end{aligned}$$

ただし実際に余分な項が消えるかの証明は省略しよう。

このように置き換えて得られる積分は、Stratonovich 積分といい、通常の解析の法則が当てはまる。しかしこれは物理過程を表すには適切でない。例えばある粒子が系のエネルギー  $H(t)$  に比例した揺動を受けるような模型を考える。粒子の位置は  $\int_0^t H(u)dW(u)$  で表される。このとき揺動の大きさ  $H(t)$  は、粒子が揺動を受ける“直前”で評価されるべきである。Stratonovich 積分のように部分期間の途中で  $H(t)$  を評価すると、時刻  $t$  に受ける揺動の大きさが、揺動を受けた後の粒子のエネルギーの寄与を受けるようになり、因果律を崩してしまう。実際、伊藤積分はマルチンゲールであるが、Stratonovich 積分はそうではない。 $\int_0^t W(u)dW(u)$  の Stratonovich 積分を  $S(t)$  と表せば、その期待値は、

$$\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}\frac{1}{2}W^2(t) = \frac{1}{2}t, \quad (\text{B.4.21})$$

であるが、 $S(0) = 0$  であるので、 $\mathbb{E}S(t) = \mathbb{E}[S(t)|\mathcal{F}(0)] \neq S(0)$  となってしまう。期待値がきちんとゼロになるには、余分な項  $-\frac{1}{2}t$  が必要である。

### B.4.3 伊藤-Doebelin の公式

前項までに伊藤積分では通常の解析の法則が当てはまらないことを見た。ここではこの特別な微積分に対する重要な公式について述べよう。確率解析の基本はこの公式を繰り返し適用することにある。ただしこの項で述べる定理の証明は長いので基本的に省略する。

#### B.4.3.1 ブラウン運動に対する公式

$f(x)$  を微分可能な関数、 $W(t)$  をブラウン運動として、 $f(W(t))$  の形で表現されるものを“微分”したい。もし仮に  $W(t)$  も微分可能であれば、通常の解析から連鎖律 (chain rule) によって、

$$\frac{d}{dt}f(W(t)) = f'(W(t))W'(t), \quad (\text{B.4.22})$$

が成り立ち、微分形式では、

$$df(W(t)) = f'(W(t))W'(t)dt = f'(W(t))dW(t), \quad (\text{B.4.23})$$

となるだろう。ところが  $W$  は実際にはゼロでない 2 次変分を持つので、正しい公式は余分な項を持ち、

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt, \quad (\text{B.4.24})$$



となる。これが微分形での伊藤-Doebelin の公式である。これを積分することで、次の積分形での伊藤-Doebelin の公式を得る。

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \int_0^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W(u))du. \quad (\text{B.4.25})$$

定理 B.4.3.1 (ブラウン運動に対する伊藤-Doebelin の公式)  $f(t, x)$  を、偏微分  $f_t(t, x)$ ,  $f_x(t, x)$ ,  $f_{xx}(t, x)$  が定義されて連続であるような関数とし、 $W(t)$  をブラウン運動とする。このとき、すべての  $T \geq 0$  に対して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(T, W(T)) &= f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))dt \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, W(t))dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, W(t))dt. \end{aligned} \quad (\text{B.4.26})$$

証明は省略するが、これを微分形式で簡単に理解しておこう。 $f(t, W(t))$  は形式的には以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} df(t, W(t)) &= f_t(t, W(t))dt + f_x(t, W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W(t))dW(t)dW(t) \\ &\quad + f_{tx}(t, W(t))dtdW(t) + \frac{1}{2}f_{tt}(t, W(t))dtdt \cdots \end{aligned} \quad (\text{B.4.27})$$

ここでブラウン運動の 2 次変分  $[W, W](t)$  が  $t$  であることや  $t$  同士の 2 次変分がゼロであることなどは式 (B.3.30)、(B.3.32) のように、

$$dW(t)dW(t) = dt, \quad dtdW(t) = 0, \quad dtdt = 0, \quad (\text{B.4.28})$$

と表されるのであった。従ってこれらを代入して、微分形の伊藤-Doebelin の公式を得られる。

$$df(t, W(t)) = f_t(t, W(t))dt + f_x(t, W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W(t))dt. \quad (\text{B.4.29})$$

#### B.4.3.2 伊藤過程に対する公式

伊藤-Doebelin の公式をより一般的な確率過程に拡張する。ここで、確率解析を説明する際の対象としたい確率過程は、以下で定義する伊藤過程である。ジャンプを含む過程を除くと、ほとんどすべての確率過程は伊藤過程である。

定義 B.4.3.1  $W(t)$ ,  $t \geq 0$  をブラウン運動とし、 $\mathcal{F}(t)$ ,  $t \geq 0$  を関連するフィルトレーションとする。伊藤過程とは、次の形の確率過程のことを言う。

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u) dW(u) + \int_0^t \Theta(u) du. \quad (\text{B.4.30})$$

ただし、 $X(0)$  は確定値で、 $\Delta(u)$  と  $\Theta(u)$  は適合確率過程、積分は伊藤積分で定義されている。

補題 B.4.3.1 伊藤過程である式 (B.4.30) の 2 次変分は、次で与えられる。

$$[X, X](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du. \quad (\text{B.4.31})$$

伊藤過程は微分形式で表すと、

$$dX(t) = \Delta(t) dW(t) + \Theta(t) dt, \quad (\text{B.4.32})$$

だが、これはあくまで積分で定義された伊藤過程を簡略的に表しているだけである。伊藤過程が定義されたので本論文の本編で出てくる Langevin 方程式がすべて数学的に定義される。すなわち、以下の形の Langevin 方程式、

$$\frac{dX}{dt}(t) = a(t) + b(t)\xi(t), \quad (\text{B.4.33})$$

は、数学的には以下の伊藤過程である。

$$dX(t) = a(t) dt + b(t) dW(t). \quad (\text{B.4.34})$$

ただし  $\xi(t)$  は 1 に規格化された白色ガウス雑音である。

また補題 B.4.3.1 も微分形式で簡単に記憶できる。伊藤過程  $X$  が単位時間に累積する 2 次変分は

$$\begin{aligned} dX(t)dX(t) &= \Delta^2(t)dW(t)dW(t) + 2\Delta(t)\Theta(t)dW(t) + \Theta^2(t)dt \\ &= \Delta^2(t)dt, \end{aligned} \quad (\text{B.4.35})$$

であるから、時刻  $t$  までに累積された 2 次変分は、

$$[X, X](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du, \quad (\text{B.4.36})$$

となる。

伊藤過程に対する伊藤-Doebelin の公式を導くために、その対象となる伊藤過程に関する積分を定義しよう。

定義 B.4.3.2  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  を定義 B.4.3.1 で述べたような伊藤過程とし、 $\Gamma(t)$ ,  $t \geq 0$  を適合過程とする。伊藤過程に関する積分を次で定義する。

$$\int_0^t \Gamma(u) dX(u) = \int_0^t \Gamma(u) \Delta(u) dW(u) + \int_0^t \Gamma(u) \Theta(u) du. \quad (\text{B.4.37})$$

この積分に対し、定理 B.4.3.1 のような伊藤-Doebelin の公式が成り立つ。

定理 B.4.3.2 (伊藤過程に対する伊藤-Doebelin の公式)  $X(t)$ ,  $t \geq 0$  を定義 B.4.3.1 で述べた伊藤過程であるとし、 $f(t, x)$  を、偏微分  $f_t(t, x)$ ,  $f_x(t, x)$ ,  $f_{xx}(t, x)$  が定義されて連続となるような関数であるとする。このとき、すべての  $T \geq 0$  に対し、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & f(T, X(T)) \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t)) dt + \int_0^T f_x(t, X(t)) dX(t) \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X(t)) d[X, X](t) \\ &= f(0, X(0)) + \int_0^T f_t(t, X(t)) dt + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Delta(t) dW(t) \\ & \quad + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Theta(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X(t)) \Delta^2(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.4.38})$$

これもやはり微分形式で記憶するのが便利である。 $f(t, x)$  の微分は、

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= f_t(t, X(t)) dt + f_x(t, X(t)) dX(t) \\ & \quad + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t)) dX(t) dX(t). \end{aligned} \quad (\text{B.4.39})$$

ここに、 $dX(t) = \Delta(t) dW(t) + \Theta(t) dt$  や  $dX(t) dX(t) = \Delta^2(t) dt$  を代入すれば、

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) &= f_t(t, X(t)) dt + f_x(t, X(t)) \Delta(t) dW(t) \\ & \quad + f_x(t, X(t)) \Theta(t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X(t)) \Delta^2(t) dt, \end{aligned} \quad (\text{B.4.40})$$

と、微分形での伊藤-Doebelin の公式を得る。

## B.5 数値計算法

最後に確率微分方程式の数値計算法 [65] について簡単に述べよう。確率微分方程式においては通常の常微分方程式に対する数値計算法を単純に拡張しても収束性が悪く、確率解析を用いて特別な手法を構築しなければならない。特に確率偏微分方程式の数値解法は未だ発展途上な分野である。

## B.5.1 離散時間近似

確率微分方程式の数値解法で標準的なのは、時間を離散化し確率差分方程式を順次解くというものである。まず  $[0, T]$  までの時間を以下のように分割する。

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots < t_N = T. \quad (\text{B.5.1})$$

最も単純なのは等分割、

$$\delta = \frac{T}{N}, \quad (\text{B.5.2})$$

だが、より一般の分割も許される。その場合も最大ステップ幅  $\delta$  は特定されなければならない。

次の形を持つ伊藤過程  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ ,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t b(X_s) dW_s, \quad (\text{B.5.3})$$

に対し、最も単純な差分近似は以下の Euler-丸山法である。

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta_n + b(Y_n)\Delta W_n. \quad (\text{B.5.4})$$

ただし  $n = 0, 1, \dots, N-1$  で、初期値は、

$$Y_0 = X_0, \quad (\text{B.5.5})$$

ステップ幅は、

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = \delta, \quad \Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}, \quad (\text{B.5.6})$$

である。数値計算的には、 $\Delta W_n$  は平均ゼロ、分散  $\Delta_n$  のガウス分布乱数で与えられる。

$$\mathbb{E}[\Delta W_n] = 0, \quad \mathbb{E}[\Delta W_n^2] = \Delta_n. \quad (\text{B.5.7})$$

## B.5.2 強収束の指標

確率微分方程式の解は当然確率的であるので、数値解法の収束性を議論するには常微分方程式から拡張された指標を用いなければならない。数学的には終時刻  $T$  での絶対誤差、

$$\epsilon(\delta) = \mathbb{E}[|X_T - Y_N|], \quad (\text{B.5.8})$$

を考えるのがよい。

定義 B.5.2.1  $t \in [0, T]$  での確率過程  $X_t$  の数値近似  $Y_n, n = 0, 1, \dots, N$  が次数  $\gamma \in (0, \infty]$  で強収束するとは、ある有限な定数  $K$  と正定数  $\delta_0$  が存在して、最大ステップ幅  $\delta$  が  $\delta \in (0, \delta_0)$  となるような任意の時間の分割に対し、以下が成り立つことを言う。

$$\mathbb{E}[|X_T - Y_N|] \leq K\delta^\gamma. \quad (\text{B.5.9})$$

伊藤過程 (B.5.3) が  $b = 0$  と確定的であった場合、上の強収束の指標は通常常微分方程式のものに帰着する。ブラウン運動の増分  $\Delta W_n$  の大きさは  $\delta$  ではなく  $\delta^{1/2}$  であるので、確率微分方程式における数値解法の次数は、常微分方程式におけるそれより小さくなることがある。実際常微分方程式の Euler-丸山近似は次数 1.0 であるのにたいし、確率微分方程式に対する Euler-丸山近似 (B.5.4) は強次数 0.5 であることが示されている。

### B.5.3 弱収束の指標

多くの実用的場面において、伊藤過程の標本路そのものの近似よりむしろ、 $\mathbb{E}X_T$  だとか  $\mathbb{E}X_T^2$ , あるいはより一般にある関数  $g$  に対し  $\mathbb{E}g(X_T)$  が近似できれば良いことがある。このとき  $X_T$  の統計性だけわかればよいので、要請される近似度は強収束の指標よりずっと弱くなる。

定義 B.5.3.1  $t \in [0, T]$  での確率過程  $X_t$  の数値近似  $Y_n, n = 0, 1, \dots, N$  が次数  $\beta \in (0, \infty]$  で弱収束するとは、任意の多項式  $g$  に対し、有限の定数  $K$  と正定数  $\delta_0$  が存在して、

$$|\mathbb{E}[g(X_T)] - \mathbb{E}[g(Y_N)]| \leq K\delta^\beta, \quad (\text{B.5.10})$$

が、最大ステップ幅  $\delta \in (0, \delta_0)$  の任意の時間分割に対して成り立つことを言う。

やはり確定的な過程に対し  $g(x) = x$  とすれば、弱収束の指標は通常収束指標に帰着する。十分な滑らかな仮定の下、Euler-丸山法は弱次数 1.0 で収束することが示されており、これは強次数 0.5 より大きい。

### B.5.4 伊藤-Taylor 展開

もう 1 つの自然な評価法は Taylor 展開の近似と比べることである。Taylor 展開のように伊藤-Doebelin の公式を繰り返し用いたものをよく、伊藤-Taylor 展開などと呼ぶ。

任意の 2 階連続微分可能関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し、伊藤-Doebelin の公式は、

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left( a(X_s) f'(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s) f''(X_s) \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t b(X_s) f'(X_s) dW_s, \\ &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t L^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 f(X_s) dW_s. \end{aligned} \quad (\text{B.5.11})$$

ただし、以下の微分演算子を導入した。

$$L^0 = a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L^1 = b \frac{\partial}{\partial x}. \quad (\text{B.5.12})$$

$f(x) = x$  とすれば  $L^0 f = a$ ,  $L^1 f = b$  だから、きちんと元の伊藤過程に戻る。

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) dW_s. \quad (\text{B.5.13})$$

式 (B.5.11) で  $f = a, b$  とした伊藤-Doebelin の公式を代入すれば\*4、1 回 Taylor 展開した形になる。

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left( a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left( b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z \right) dW_s \\ &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s + R. \end{aligned} \quad (\text{B.5.14})$$

ただし、

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s. \end{aligned} \quad (\text{B.5.15})$$

これが最も単純で非自明な伊藤-Taylor 展開である。もちろんさらに続けることも可能で、例えば式 (B.5.11) で  $f = L^1 b$  としたものから、

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + a(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s \\ &\quad + L^1 b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s + \bar{R}, \end{aligned} \quad (\text{B.5.16})$$

\*4  $a, b$  は時間に陽に依存しない関数だとしている。

で、残りは  $\bar{R}$  は、

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^0 L^1 b(X_u) du dW_z dW_s \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z L^1 L^1 b(X_u) dW_u dW_z dW_s,\end{aligned}\tag{B.5.17}$$

となる。

### B.5.5 強 Taylor 近似

最も単純な強 Taylor 近似は Euler-丸山近似である。

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n.\tag{B.5.18}$$

その次の項まで入れた (B.5.16) を用いると Milstein 法を得る。

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb' \{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\}.\tag{B.5.19}$$

ここで最後の項は、例題 B.4.2.1 より、

$$\begin{aligned}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_2} dW_{s_1} dW_{s_2} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (W_{s_2} - W_{t_n}) dW_{s_2} \\ &= \frac{1}{2} \{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\},\end{aligned}\tag{B.5.20}$$

であることを用いた。Milstein 法は  $\mathbb{E}X_0^2 < \infty$  で  $a, b$  が 2 階連続微分可能、 $a, a', b, b', b''$  が Lipschitz 連続であるとき、1.0 次で強収束することが示される。

### B.5.6 強 Runge-Kutta 法

強 Taylor 近似法は各ステップで係数  $a, b$  の微分を評価しなければならない。これを避けるために Runge-Kutta 法が導入される。ただし注意しなければならないのは、やはり常微分方程式に対する Runge-Kutta 法をそのまま適用することはできないということである。

強次数 1.0 次 Runge-Kutta 法は以下で与えられる。

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2} \left\{ b(\hat{Y}_n) - b \right\} \{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\} \Delta_n^{-1/2}.\tag{B.5.21}$$

ただし、

$$\hat{Y}_n = Y_n + b\Delta_n^{1/2}.\tag{B.5.22}$$

表 B.1. 拡張された Butcher 表

$c^{(0)}$	$A^{(0)}$	$B^{(0)}$	
$c^{(1)}$	$A^{(1)}$	$B^{(1)}$	
	$\alpha^T$	$\beta^{(1)T}$	$\beta^{(2)T}$

これは Milstein 法で単に  $bb'$  を有限差分  $(b(\hat{Y}_n) - b)/\Delta_n^{1/2}$  で置き換えたものである。

Runge-Kutta の実用的な点は多段階化することによって、大きなステップ幅でも安定にすることができることである。一般に独立な  $m$  次元ブラウン運動に依る伊藤過程、

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j, \quad (\text{B.5.23})$$

に対する  $s$  段強 1.0 次 Runge-Kutta は次のようにパラメータ付けされる [66]。

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = Y_n &+ \sum_{i=1}^s \alpha_i a(t_n + c_i^{(0)} h_n, H_i^{(0)}) \Delta_n \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^s (\beta_i^{(1)} I_{(k)} + \beta_i^{(2)} \sqrt{\Delta_n}) b^k(t_n + c_i^{(1)} \Delta_n, H_i^{(k)}). \end{aligned} \quad (\text{B.5.24})$$

ただし、

$$\begin{aligned} H_i^{(0)} &= Y_n + \sum_{j=1}^s A_{ij}^{(0)} a(t_n + c_j^{(0)} \Delta_n, H_j^{(0)}) \Delta_n + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^s B_{ij}^{(0)} b^l(t_n + c_j^{(1)} \Delta_n, H_j^{(l)}) \Delta W_l, \\ H_i^{(k)} &= Y_n + \sum_{j=1}^s A_{ij}^{(1)} a(t_n + c_j^{(0)} \Delta_n, H_j^{(0)}) \Delta_n + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^s B_{ij}^{(1)} b^l(t_n + c_j^{(1)} \Delta_n, H_j^{(l)}) \frac{\Delta W_l \Delta W_k}{2\sqrt{\Delta_n}}, \\ &\quad - \sum_{j=1}^s B_{ij}^{(1)} b^k(t_n + c_j^{(1)} \Delta_n, H_j^{(k)}) \frac{\sqrt{\Delta_n}}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.5.25})$$

である。パラメータはよく、拡張された Butcher 表 B.1 を用いて表す。

表 B.2 には 3 段強 1.0 次のパラメータを示した。本論文ではこの数値解法を用いている。



表 B.2. 3 段強 1.0 次 Runge-Kutta の Butcher 表。本論文ではこれを用いている。

0									
0	0			0					
0	0	0		0	0				
0									
0	0			1					
0	0	0		-1	0				
	1	0	0	1	0	0	0	1/2	-1/2



## 謝辞

本論文の執筆にあたり、指導教官であるカブリ数物連携宇宙研究機構 (IPMU) の村山 齊特任教授には優れた環境で研究が行えるよう支援いただいた。論文推敲においても有益な助言をいただき、ここに深謝の意を表す。

また共同研究者である宇宙線研究所 (ICRR) の川崎雅裕教授、IPMU の藤田智弘氏、ICRR の竹迫知博氏には本研究の草稿段階から多くの議論に時間を割いていただき、研究の中核をなす重要なアイデアに至る素晴らしいコメントをいくつもいただいた。論文推敲においても多大な協力をいただき、ここに厚く御礼申し上げる。

数値計算や結果の考察においては ICRR の横山修一郎博士との議論が大変有意義であった。快く議論を引き受けてくださったことに心より感謝する。

修士論文の審査においては、副査の横山順一教授にもご協力いただいた。

最後に、日頃から多くの助言と示唆を与えてくれた IPMU および ICRR の学生の皆様、温かい励ましを送り続けてくれた家族、そしていつも隣で支え、可愛らしいいたずらで邪魔をしてくださった玉澤裕子氏に、厚く感謝の意を表す。

なお本研究はフォトンサイエンス・リーディング大学院の支援を受けて実施された。



## 参考文献

- [1] T. Fujita, M. Kawasaki, Y. Tada and T. Takesako, “A new algorithm for calculating the curvature perturbations in stochastic inflation,” *JCAP* 1312, 036 (2013) [arXiv:1308.4754 [astro-ph.CO]].
- [2] S. Weinberg, “Cosmology,” Oxford, UK: Oxford Univ. Pr. (2008) 593 p
- [3] D. H. Lyth and A. R. Liddle, “The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2009) 497 p
- [4] 松原隆彦, “現代宇宙論,” 東京大学出版会 (2010) 385 p
- [5] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda and J. i. Yokoyama, “New cosmological constraints on primordial black holes,” *Phys. Rev. D* 81, 104019 (2010) [arXiv:0912.5297 [astro-ph.CO]].
- [6] B. J. Carr, “The Primordial black hole mass spectrum,” *Astrophys. J.* 201, 1 (1975).
- [7] B. J. Carr, “Some cosmological consequences of primordial black-hole evaporations,” *Astrophys. J.* 206, 8 (1976).
- [8] B. J. Carr, “Primordial black holes as a probe of cosmology and high energy physics,” *Lect. Notes Phys.* 631, 301 (2003) [astro-ph/0310838].
- [9] T. Bringmann, P. Scott and Y. Akrami, “Improved constraints on the primordial power spectrum at small scales from ultracompact minihalos,” *Phys. Rev. D* 85, 125027 (2012) [arXiv:1110.2484 [astro-ph.CO]].
- [10] A. S. Josan and A. M. Green, “Gamma-rays from ultracompact minihalos: potential constraints on the primordial curvature perturbation,” *Phys. Rev. D* 82, 083527 (2010) [arXiv:1006.4970 [astro-ph.CO]].
- [11] F. Li, A. L. Erickcek and N. M. Law, “A new probe of the small-scale primordial power spectrum: astrometric microlensing by ultracompact minihalos,” *Phys. Rev. D* 86, 043519 (2012) [arXiv:1202.1284 [astro-ph.CO]].

- [12] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], “Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters,” arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [13] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [14] A. A. Starobinsky, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,” *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [15] K. Sato, “First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **195**, 467 (1981).
- [16] A. D. Linde, “A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems,” *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [17] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
- [18] R. Brout, F. Englert and E. Gunzig, “The Creation of the Universe as a Quantum Phenomenon,” *Annals Phys.* **115**, 78 (1978).
- [19] A. A. Starobinsky, “Relict Gravitation Radiation Spectrum and Initial State of the Universe. (In Russian),” *JETP Lett.* **30**, 682 (1979) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **30**, 719 (1979)].
- [20] D. Kazanas, “Dynamics of the Universe and Spontaneous Symmetry Breaking,” *Astrophys. J.* **241**, L59 (1980).
- [21] J. M. Kovalik and J. L. Kirschvink, “New Superconducting Quantum Interface Device Based Constraints on the Abundance of Magnetic Monopoles Trapped in Matter: An Investigation of Deeply Buried Rocks,” *Phys. Rev. A* **33**, 1183 (1986).
- [22] A. D. Linde, “Chaotic Inflation,” *Phys. Lett. B* **129**, 177 (1983).
- [23] A. D. Linde, “Hybrid inflation,” *Phys. Rev. D* **49**, 748 (1994) [astro-ph/9307002].
- [24] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E. D. Stewart and D. Wands, “False vacuum inflation with Einstein gravity,” *Phys. Rev. D* **49**, 6410 (1994) [astro-ph/9401011].
- [25] D. H. Lyth, *JCAP* **1107**, 035 (2011) [arXiv:1012.4617 [astro-ph.CO]].
- [26] D. H. Lyth, *JCAP* **1205**, 022 (2012) [arXiv:1201.4312 [astro-ph.CO]].
- [27] E. Halyo, “Hybrid inflation from supergravity D terms,” *Phys. Lett. B* **387**, 43 (1996) [hep-ph/9606423].
- [28] P. Binetruy and G. R. Dvali, “D term inflation,” *Phys. Lett. B* **388**, 241 (1996) [hep-ph/9606342].

- [29] G. R. Dvali, Q. Shafi and R. K. Schaefer, “Large scale structure and supersymmetric inflation without fine tuning,” *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1886 (1994) [hep-ph/9406319].
- [30] R. Kallosh and A. D. Linde, “P term, D term and F term inflation,” *JCAP* **0310**, 008 (2003) [hep-th/0306058].
- [31] S. Clesse and J. Rocher, “Avoiding the blue spectrum and the fine-tuning of initial conditions in hybrid inflation,” *Phys. Rev. D* **79**, 103507 (2009) [arXiv:0809.4355 [hep-ph]].
- [32] S. Clesse, “Hybrid inflation along waterfall trajectories,” *Phys. Rev. D* **83**, 063518 (2011) [arXiv:1006.4522 [gr-qc]].
- [33] D. Polarski and A. A. Starobinsky, “Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations,” *Class. Quant. Grav.* **13**, 377 (1996) [gr-qc/9504030].
- [34] D. H. Lyth, K. A. Malik and M. Sasaki, “A General proof of the conservation of the curvature perturbation,” *JCAP* **0505**, 004 (2005) [astro-ph/0411220].
- [35] A. A. Starobinsky, “Multicomponent de Sitter (Inflationary) Stages and the Generation of Perturbations,” *JETP Lett.* **42**, 152 (1985) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42**, 124 (1985)].
- [36] D. S. Salopek and J. R. Bond, “Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models,” *Phys. Rev. D* **42**, 3936 (1990).
- [37] M. Sasaki and E. D. Stewart, “A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation,” *Prog. Theor. Phys.* **95**, 71 (1996) [astro-ph/9507001].
- [38] M. Sasaki and T. Tanaka, “Superhorizon scale dynamics of multiscalar inflation,” *Prog. Theor. Phys.* **99**, 763 (1998) [gr-qc/9801017].
- [39] A. A. Starobinsky, “Stochastic De Sitter (inflationary) Stage In The Early Universe,” In \*De Vega, H.j. ( Ed.), Sanchez, N. ( Ed.): *Field Theory, Quantum Gravity and Strings\**, 107-126 (1986).
- [40] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, “Equilibrium state of a selfinteracting scalar field in the De Sitter background,” *Phys. Rev. D* **50**, 6357 (1994) [astro-ph/9407016].
- [41] M. Sasaki, Y. Nambu and K. -i. Nakao, “Classical Behavior Of A Scalar Field In The Inflationary Universe,” *Nucl. Phys. B* **308**, 868 (1988).
- [42] K. -i. Nakao, Y. Nambu and M. Sasaki, “Stochastic Dynamics Of New Inflation,” *Prog. Theor. Phys.* **80**, 1041 (1988).
- [43] Y. Nambu and M. Sasaki, “Stochastic Approach To Chaotic Inflation And The

- Distribution Of Universes,” *Phys. Lett. B* **219**, 240 (1989).
- [44] S. Mollerach, S. Matarrese, A. Ortolan and F. Lucchin, “Stochastic inflation in a simple two field model,” *Phys. Rev. D* **44**, 1670 (1991).
- [45] F. Finelli, G. Marozzi, A. A. Starobinsky, G. P. Vacca and G. Venturi, “Generation of fluctuations during inflation: Comparison of stochastic and field-theoretic approaches,” *Phys. Rev. D* **79**, 044007 (2009) [arXiv:0808.1786 [hep-th]].
- [46] F. Finelli, G. Marozzi, A. A. Starobinsky, G. P. Vacca and G. Venturi, “Stochastic growth of quantum fluctuations during slow-roll inflation,” *Phys. Rev. D* **82**, 064020 (2010) [arXiv:1003.1327 [hep-th]].
- [47] J. C. B. Sanchez and K. Enqvist, “On the fate of coupled flat directions during inflation,” *JCAP* **1303** (2013) 029 [arXiv:1210.7007 [astro-ph.CO]].
- [48] J. C. B. Sanchez and K. Dimopoulos, “Inflationary buildup of a vector field condensate and its cosmological consequences,” arXiv:1308.3739 [hep-ph].
- [49] K. Enqvist, D. G. Figueroa and G. Rigopoulos, “Fluctuations along supersymmetric flat directions during Inflation,” *JCAP* **1201**, 053 (2012) [arXiv:1109.3024 [astro-ph.CO]].
- [50] M. Kawasaki and T. Takesako, “Stochastic Approach to Flat Direction during Inflation,” *JCAP* **1208**, 031 (2012).
- [51] S. Winitzki and A. Vilenkin, “Effective noise in stochastic description of inflation,” *Phys. Rev. D* **61**, 084008 (2000) [gr-qc/9911029].
- [52] H. Casini, R. Montemayor and P. Sisterna, “Stochastic approach to inflation. 2. Classicality, coarse graining and noises,” *Phys. Rev. D* **59**, 063512 (1999) [gr-qc/9811083].
- [53] M. Morikawa, “Dissipation and Fluctuation of Quantum Fields in Expanding Universes,” *Phys. Rev. D* **42**, 1027 (1990).
- [54] L. Perreault Levasseur, “Lagrangian Formulation of Stochastic Inflation: A Recursive Approach,” arXiv:1304.6408 [hep-th].
- [55] L. Perreault Levasseur, V. Vennin and R. Brandenberger, “Recursive Stochastic Effects in Valley Hybrid Inflation,” arXiv:1307.2575 [hep-th].
- [56] J. Martin and V. Vennin, “Stochastic Effects in Hybrid Inflation,” *Phys. Rev. D* **85**, 043525 (2012) [arXiv:1110.2070 [astro-ph.CO]].
- [57] K. E. Kunze, “Perturbations in stochastic inflation,” *JCAP* **0607**, 014 (2006) [astro-ph/0603575].
- [58] P. Ivanov, “Nonlinear metric perturbations and production of primordial black



- holes,” *Phys. Rev. D* **57**, 7145 (1998) [astro-ph/9708224].
- [59] J. i. Yokoyama, “Chaotic new inflation and formation of primordial black holes,” *Phys. Rev. D* **58**, 083510 (1998) [astro-ph/9802357].
- [60] R. Saito, J. i. Yokoyama and R. Nagata, “Single-field inflation, anomalous enhancement of superhorizon fluctuations, and non-Gaussianity in primordial black hole formation,” *JCAP* **0806**, 024 (2008) [arXiv:0804.3470 [astro-ph]].
- [61] J. Martin and M. Musso, “Solving stochastic inflation for arbitrary potentials,” *Phys. Rev. D* **73**, 043516 (2006) [hep-th/0511214].
- [62] J. Martin and M. Musso, “On the reliability of the Langevin perturbative solution in stochastic inflation,” *Phys. Rev. D* **73**, 043517 (2006) [hep-th/0511292].
- [63] A. K. Das, “Finite temperature field theory,” Singapore, Singapore: World Scientific (1997) 404 p.
- [64] S. E. Shreve, “Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models,” Springer-Verlag, New York (2004) 550 p.
- [65] P. E. Kloeden and E. Platen, “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations,” Springer-Verlag, New York (1992) 632 p.
- [66] A. Rößler, “Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations,” *SIAM Journal on Numerical Analysis* **48.3** (2010): 922-952.